ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 145
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 15
Α3. Η Τ είναι η παράγωγος της f και η Η είναι η παράγωγος της g.
Α4. α. Ψ

β. Αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,

τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}[f(x) + g(x)] = 1$.

Α5. α. Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$ ως πολυωνυμική και στο $(1, +\infty)$ ως ρητή. Για να είναι συνεχής στο IR, θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, δηλαδή θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2 + \alpha) = \alpha + 1 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x} = 2 \\ \bullet\ f(1) = 1^2 + \alpha = \alpha + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + 1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Για $\alpha = 1$ είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 1 \\ \dfrac{x+1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

Β2. Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{x+1}{x}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{-x+1}{x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-\cancel{(x-1)}}{x\cdot \cancel{(x-1)}} = -1$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$,

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, δηλαδή

δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

Β3. Αναζητούμε x_0 τέτοιο ώστε $f'(x_0) = -\frac{1}{4}$.

▷ Για $x < 1$ έχουμε : $f'(x) = (x^2+1)' = 2x$

$f'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x_0 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{8}$ $\left(\text{δεκτή αφού } -\frac{1}{8} < 1\right)$

$f\left(-\frac{1}{8}\right) = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 + 1 = \frac{1}{64} + 1 = \frac{65}{64} \rightarrow \boxed{\mathbf{A\left(-\frac{1}{8}, \frac{65}{64}\right)}}$

$(\varepsilon_1) : y - f\left(-\frac{1}{8}\right) = f'\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y - \frac{65}{64} = -\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{8}\right)$

$\Leftrightarrow y - \frac{65}{64} = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{32} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{y = -\frac{1}{4}x + \frac{63}{64}}}$

▷ Για $x > 1$ έχουμε : $f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$f'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^{\,2}} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^{\,2} = 4 \overset{x_0>1}{\Leftrightarrow} x_0 = 2$

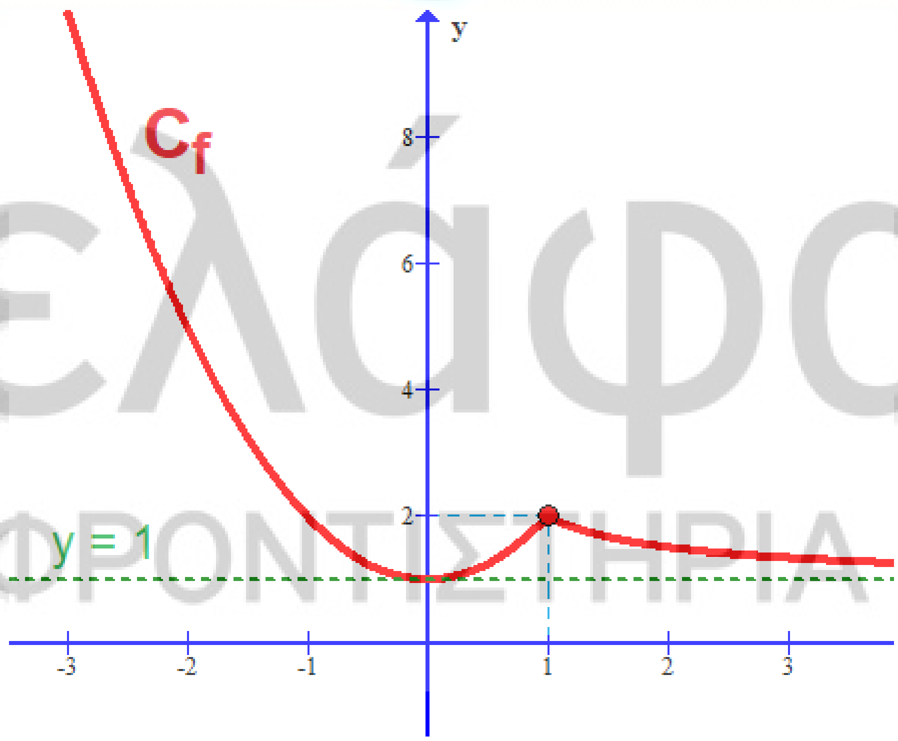
$f(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\mathbf{B\left(2, \frac{3}{2}\right)}}$

$(\varepsilon_2) : y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}\cdot(x-2) \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{y = -\frac{1}{4}x + 2}}$

B3. $D_f = \mathbb{R}$

- Η f είναι συνεχής στο IR,
  άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες
- Στο $(-\infty\ ,\ 1]$ η f είναι πολυωνυμική δευτέρου βαθμού,
  άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$,
  άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$
  την ευθεία $y = 1$.

Γραφική παράσταση της f



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = (2ημx - x)' = 2συνx - 1,\ x \in [0\ ,\ π]$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2συνx - 1 = 0 \Leftrightarrow συνx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx = συν\frac{π}{3}$$

και επειδή $x \in [0\ ,\ π]$ θα είναι $x = \frac{π}{3}$.

$f'(0) = 2συν0 - 1 = 1 > 0$

x	0		$\frac{π}{3}$		π
f΄(x)		-	0	+	
f (x)		↗		↘	
	τ.ελ.		τ.μ.		τ.ελ.

$f'(π) = 2συνπ - 1 = -1 < 0$

$f(0) = 2ημ0 - 0 = 0$

$f\left(\frac{π}{3}\right) = 2ημ\frac{π}{3} - \frac{π}{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{π}{3} = \sqrt{3} - \frac{π}{3}$

$f(π) = 2ημπ - π = -π$

- ▹ Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = 0$,
- ▹ Η f παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο για $x = \frac{π}{3}$ την τιμή $f\left(\frac{π}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{π}{3}$
- ▹ Η f παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο για $x = π$ την τιμή $f(π) = -π$.

Γ2. $f''(x) = (2συνx - 1)' = -2ημx \leq 0$, για κάθε $x \in [0\ ,\ π]$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$ ή $x = π$.

Επομένως η f είναι κοίλη στο $[0\ ,\ π]$ και οποιαδήποτε εφαπτομένη της στο τυχαίο σημείο $Α(x_0\ ,\ f(x_0))$ βρίσκεται πάνω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής Α, δηλαδή έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τη C_f.

Γ3. $\int_0^{\pi} f(x)\cdot συνx\,dx = \int_0^{\pi}(2ημx - x)\cdot συνx\,dx$

$$= \int_0^{\pi}(2ημx\cdot συνx - x\cdot συνx)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}2ημx\cdot συνx\,dx - \int_0^{\pi}x\cdot συνx\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}ημ2x\,dx - \int_0^{\pi}x\cdot(ημx)'\,dx$$

$$= \cancel{\left[-\frac{συν2x}{2}\right]_0^{\pi}} - \cancel{[x\cdot ημx]_0^{\pi}} + \int_0^{\pi}(x)'\cdot ημx\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}ημx\,dx = [-συνx]_0^{\pi} = -συνπ + συν0 = \boxed{2}$$

Γ4. α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2ημx - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(2\frac{ημx}{x} - 1\right) = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x} - 1$

$$= 2\cdot 1 - 1 = 2 - 1 = \boxed{1}$$

β) $\lim\limits_{x\to 0}[(f(x) - f(2x))\cdot \ell nx] = \lim\limits_{x\to 0}[(2ημx - x - 2ημ2x + 2x)\cdot \ell nx]$

$$= \lim_{x\to 0}[(2ημx - 2ημ2x + x)\cdot \ell nx]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(2\frac{ημx}{x} - 2\frac{ημ2x}{x} + 1\right)\cdot x\ell nx\right]$$

$$= \boxed{0}$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\frac{ημx}{x} - 2\frac{ημ2x}{x} + 1\right) = 2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x} - 2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημ2x}{x} + 1$

$$= 2\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1 = 2 - 4 + 1 = -1$$

και $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot \ell nx) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ell nx}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ τη συνάρτηση g, με $g(x) = (x+1)\cdot \ell n(x+1) - x,\ x \geq 0$

$$g'(x) = [(x+1)\cdot \ell n(x+1) - x]'$$

$$= (x+1)'\cdot \ell n(x+1) + (x+1)\cdot [\ell n(x+1)]' - (x)'$$

$$= 1\cdot \ell n(x+1) + \cancel{(x+1)}\cdot \frac{1}{\cancel{x+1}} - 1 = \ell n(x+1) + \cancel{1} - \cancel{1} = \ell n(x+1)$$

Για $x > 0$ είναι $x+1 > 1 \Leftrightarrow \ell n(x+1) > \ell n1 \Leftrightarrow g'(x) > 0$

και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$,

η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Είναι $x > 0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow (x+1)\cdot \ell n(x+1) - x > 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)\cdot \ell n(x+1) > x \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} \boxed{\ell n(x+1) > \frac{x}{x+1}}$

Δ2. $$f'(x) = \left[\frac{\ell n(x+1)}{x}\right]' = \frac{[\ell n(x+1)]'\cdot x - \ell n(x+1)\cdot (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1}\cdot x - \ell n(x+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{x+1} - \ell n(x+1)}{x^2}$$

Είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x > 0$, διότι $\frac{x}{x+1} < \ell n(x+1)$ από Δ1.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

δηλαδή είναι 1-1, άρα **αντιστρέφεται**.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ell n(x+1)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ell n(x+1)}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

άρα $f(A) = \mathbf{D_{f^{-1}} = (0, 1)}$

Δ3. $f(x) < 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(f(x)) > f(1) \Leftrightarrow \dfrac{\ell n(f(x)+1)}{f(x)} > \ell n2 \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}$

$\ell n(f(x)+1) > f(x)\cdot \ell n2 \Leftrightarrow \ell n(f(x)+1) > \ell n2^{f(x)} \overset{\ell nx\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$f(x) + 1 > 2^{f(x)} \Leftrightarrow$ **$f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.**

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με

$h(x) = x\cdot(x-2)\cdot f(\alpha) + x\cdot(x-1)\cdot f^{-1}(\alpha) + (x-1)\cdot(x-2)\cdot ημ(π\alpha)$, $x \in IR$.

- Η h είναι συνεχής στα $[0, 1]$ και $[1, 2]$ ως πολυωνυμική
- $h(0) = 2\cdot ημ(π\alpha) > 0$, διότι $0<\alpha<1 \Leftrightarrow 0<π\alpha<π$ και $ημ(π\alpha) > 0$

  $h(1) = -f(\alpha) < 0$, διότι $f(\alpha) > 0$ από Δ2

  $h(2) = f^{-1}(\alpha) > 0$, διότι $D_f = (0, +\infty)$ είναι το σύνολο τιμών της f^{-1}

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano για τη συνάρτηση h στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 2]$, δηλαδή η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Η h είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού άρα έχει δύο το πολύ ρίζες. Επομένως η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μια στο διάστημα $(0, 1)$ και μια στο διάστημα $(1, 2)$.

Επειδή τα 0, 1 και 2 δεν είναι ρίζες της εξίσωσης $h(x) = 0$,

οι εξισώσεις $\dfrac{f(\alpha)}{x-1} + \dfrac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \dfrac{ημ(π\alpha)}{x} = 0$ και $h(x) = 0$

είναι ισοδύναμες στο $(-\infty, 0)\cup(0, 1)\cup(1, +\infty)$,

δηλαδή η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)}{x-1} + \dfrac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \dfrac{ημ(π\alpha)}{x} = 0$

έχει δύο ακριβώς ρίζες, μια στο $(0, 1)$ και μια στο $(1, 2)$.

Δ5. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο [1 , e], με $F'(x) = f(x)$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την F στο διάστημα [1 , e]

άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(e) - F(1)}{e-1} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{e\cdot \ell n2 - F(1)}{e-1}$$

$$1 < \xi \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(1) > f(\xi) \Leftrightarrow \ell n2 > \frac{e\cdot \ell n2 - F(1)}{e-1} \overset{e-1>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\cancel{e\cdot \ell n2} - \ell n2 > \cancel{e\cdot \ell n2} - F(1) \Leftrightarrow \mathbf{F(1) > \ell n2 \quad (1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = F(x) - x\cdot f(x),\ x > 0$

$$\varphi'(x) = [F(x) - x\cdot f(x)]' = F'(x) - [x\cdot f(x)]'$$
$$= f(x) - [f(x) + x\cdot f'(x)] = \cancel{f(x)} - \cancel{f(x)} - x\cdot f'(x)$$
$$= -x\cdot f'(x),\ x > 0$$

Είναι $\varphi'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, διότι $f'(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$

άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

$$1 < e \overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow} \varphi(1) < \varphi(e) \Leftrightarrow$$
$$F(1) - f(1) < F(e) - e\cdot f(e) \Leftrightarrow$$
$$F(1) - \ell n2 < e\cdot \ell n2 - \cancel{e}\cdot\frac{\ell n(e+1)}{\cancel{e}} \Leftrightarrow$$
$$F(1) - \ell n2 < e\cdot \ell n2 - \ell n(e+1) \Leftrightarrow$$
$$F(1) < e\cdot \ell n2 + \ell n2 - \ell n(e+1) \Leftrightarrow$$
$$F(1) < (e+1)\cdot \ell n2 - \ell n(e+1) \Leftrightarrow$$
$$F(1) < \ell n2^{e+1} - \ell n(e+1) \Leftrightarrow$$
$$\mathbf{F(1) < \ell n\frac{2^{e+1}}{e+1} \quad (2)}$$

Από (1) και (2) έχουμε $\boxed{\ell n2 < F(1) < \ell n\frac{2^{e+1}}{e+1}}$