**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ**

**ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ**

**ΤΡΙΤΗ 14 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2010**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ**

**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx, x∈A, όπου Α = ℝ **–** {x /συνx≠0}

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

, x∈A

**Μονάδες 10**

**Α2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x0 του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**Α3.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

**β)** Αν α > 1, τότε 

**γ)** Αν η συνάρτηση f : Α ⟶ℝ είναι 1**–**1, τότε ισχύει f-1(f (x)) = x, x∈A

**δ) **,c∈ℝ

**ε)** Αν οι συναρτήσεις f΄, g΄ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει, x∈Δ

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει **|z|=|z – 2i|**

**Β1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση ψ = 1

**Μονάδες 7**

**Β2.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με 2

**Μονάδες 10**

**Β3.** Έστω z1 = 1 + i και z2 = **–**1 + i οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα Β2.

Να αποδείξετε ότι 

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x3 **–**3lnx, x > 0

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ο άξονας ψ΄ψ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 2 έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (1, e)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη στο ℝ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

f΄(x) = **–** f(x) + x, x∈ℝ και f (0) = 0

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

g(x) = ex(f(x) **–** x+1), x∈ℝ, είναι σταθερή.

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι f(x) = e-x + x **–** 1, x∈ℝ

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι f(x) ≥ 0, για κάθε x∈ℝ

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία x = 1

**Μονάδες 7**