**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ**

**ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ**

**ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ**

**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς z1, z2 ισχύει:

|z1 z2|=|z1||z2|

**Μονάδες 10**

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Βolzano.

**Μονάδες 5**

1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.* 
   1. Αν z1, z2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί με z1≠z2 τότε η εξίσωση

|z  z1|=| z  z2|

παριστάνει τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία A(z1) και B(z2)

1. Οι γραφικές παραστάσεις C και C ΄ των συναρτήσεων f και f −1 είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x.
2. Αν 0<α<1 τότε 
3. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ’ ένα σημείο x0 τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x0
4. Αν f:[α,β] → ℝ είναι συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει f(x)≥0 για κάθε x∈[α,β], τότε: 

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

****

1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο Κ (2,0) και ακτίνα ρ=1, εκτός από ένα σημείο του (μονάδες 7). Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου αυτού (μονάδες 2).

**Μονάδες 9**

1. Αν z1, z2 είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς του ερωτήματος Β1, να αποδείξετε ότι

z1 + z2 4 ≤2

**Μονάδες 8**

1. Από τους μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1, να βρεθούν εκείνοι για τους οποίους ισχύει:

|z|=

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση , x>0.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0, +∞), και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

**Μονάδες 8**

1. Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο αριθμό α τέτοιο, ώστε στο διάστημα (α, α+1) η εξίσωση

f(x4+2x) = f(4)

να έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

**Μονάδες 9**

1. Να λύσετε στο διάστημα (0, + ∞) την ανίσωση



**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνεχής συνάρτηση f : (0, +∞) → ℝ για την οποία ισχύει:

,x>0

1. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με



**Μονάδες 6**

1. Να αποδείξετε ότι

****,x>0

(μονάδες 3) καθώς επίσης ότι η ευθεία με εξίσωση y = x είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞ (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

1. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ασύμπτωτη ( y = x ) της γραφικής παράστασης της f στο +∞ και τις ευθείες x=1 και x=e2

**Μονάδες 8**

1. Να αποδείξετε ότι

 για κάθε , x>1

**Μονάδες 5**