**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ**

**ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ**

**ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2014**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ**

**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν f′(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

**Μονάδες 10**

1. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

**Μονάδες 5**

1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.* 
   1. Αν z1, z2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί τότε η ισχύει:

||z1||z2||≤|z1z2| ≤|z1||z2| (μονάδες 2)

1. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό. (μονάδες 2)
2. Ισχύει:  (μονάδες 2)
3. Ισχύει: (συνx)′ = ημx , για κάθε x∈ℝ (μονάδες 2)
4. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε:

 (μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

|z4|=2|z+1|

1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2

**Μονάδες 9**

1. Αν z1 ο πραγματικός αριθμός με Re(z1)>0 και z2 ο φανταστικός αριθμός με Im(z2)<0 είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς του **ερωτήματος Β1**, τότε να αποδείξετε ότι: z1 = 2 και z2 = 2i

**Μονάδες 8**

1. Αν z1, z2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του **ερωτήματος Β2**, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

(z1z2)20  (z1z2)20

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση , x>0.

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

**Μονάδες 8**

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία (μονάδες 5) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

e∙f(x) ≤ 1 για κάθε x > 0 (μονάδες 5)

**Μονάδες 10**

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x x ′ και την ευθεία 

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση f (x) = 2x + x2  2x1, x∈ℝ

1. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση f είναι κυρτή στο ℝ (μονάδες 4).

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

f(x) = 0

έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις x1= 0 και x2= 1(μονάδες 5)

**Μονάδες 9**

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός xo∈(0,1) τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο A(xo,f(xo)), να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x

**Μονάδες 8**

1. Να αποδείξετε ότι f(x) < 0 για κάθε x∈(0, 1) (μονάδες 4) και, στη συνέχεια, να λύσετε στο διάστημα (0, 1] την εξίσωση:

 (μονάδες 4)

**Μονάδες 8**