Τράπεζα θεμάτων 13-6-2022

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου ΕΠΑΛ

Εκφωνήσεις

130 Ασκήσεις

www.Askisopolis.gr

Στέλιος Μιχαήλογλου

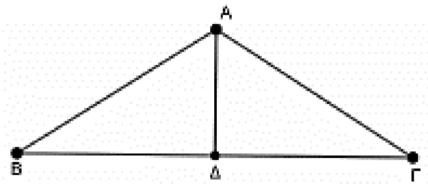
Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων

2ο Θέμα

12535. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΒ = ΑΓ η γωνία της κορυφής του Α είναι ίση με 120^o . Αν η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου τότε:

α) να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΒΑΔ. (Μονάδες 12)

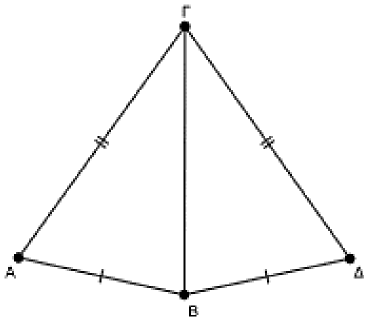
β) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 13)



12538. Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν ΑΒ = ΒΔ, ΑΓ = ΓΔ και η $\mathrm{BA\Gamma} = 75^\circ$.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ. (Μονάδες 13)

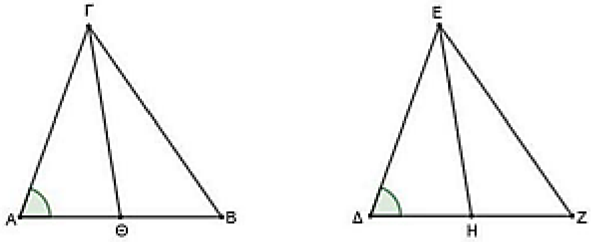
β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΔΓ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)



12454. Δίνονται δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΗΕ για τα οποία ισχύει ΑΒ =ΔΖ = 4, ΑΓ = ΔΕ και $\mathrm{A} = \Delta$. Έστω Θ το μέσο της ΑΒ και Θ το μέσο της ΔΗ.

α) Να υπολογίσετε το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΘ και ΔΗ. (Μονάδες 10)

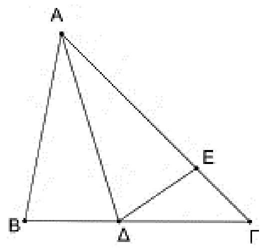
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΘ και ΔΕΘ είναι ίσα. (μονάδες 15)



13436. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 και ΑΓ = 7 και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΓΕ = 2.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ. (Μονάδες 10)

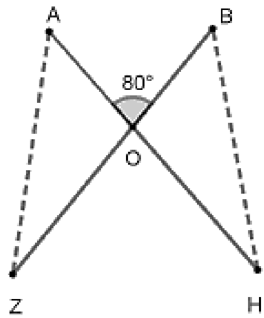
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



13445. Στο διπλανό σχήμα, τα τμήματα ΑΗ και ΒΖ είναι ίσα και τέμνονται σε σημείο Ο έτσι ώστε η γωνία ΑΟΒ να είναι ίση με 80^o . Έστω ότι είναι ΑΗ = ΒΖ = 5 και ΟΗ = ΟΖ =3.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AOZ} = \mathrm{BOH} = 100^\circ$. (Μονάδες 10)

β) Είναι τα τρίγωνα ΑΟΖ και ΒΟΗ ίσα ? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

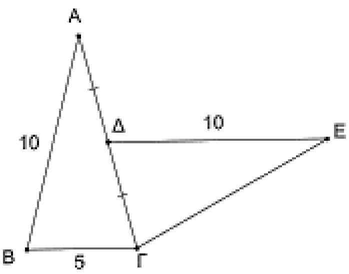


13527. Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ με ΑΒ = ΑΓ και ΕΔ = ΕΓ. Αν ΒΓ = 5, ΑΒ = ΕΔ = 10 και Δ είναι το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

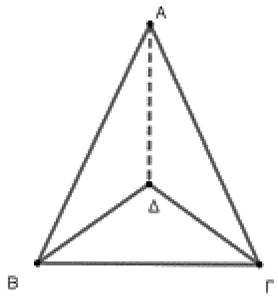
α) ΒΓ = ΔΓ. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) $\mathrm{A} = \mathrm{E}$. (Μονάδες 5)



13681. Στο σχήμα που ακολουθεί, τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΒΔΓ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΒΓ.



α) Στις παρακάτω προτάσεις να συμπληρώσετε τα κενά με τις ίσες πλευρές και τις ίσες γωνίες για τα δυο ισοσκελή τρίγωνα ΒΑΓ και ΒΔΓ.
1) Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΒΑΓ είναι οι ………και …….
2) Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΒΔΓ είναι οι …….. και …….
3) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΓ η γωνία ΒΓΔ είναι ίση με την γωνία ……..
4) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΓ η γωνία ΒΓΑ είναι ίση με την γωνία ……..
(Μονάδες 10)

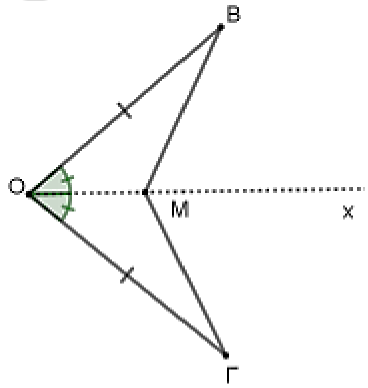
β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) Στον πίνακα που ακολουθεί, στη στήλη Α δίνονται γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ, ενώ στη στήλη Β δίνονται γωνίες του τριγώνου ΑΔΓ. Να αντιστοιχήσετε κάθε γωνία του τριγώνου ΑΔΒ με την αντίστοιχη ίση της γωνία του τριγώνου ΑΔΓ που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ του β) ερωτήματος.

Στήλη Α (γωνίες τριγώνου ΑΔΒ)	Στήλη Β (γωνίες τριγώνου ΑΔΓ)
1. γωνία ΑΒΔ	α) γωνία ΓΑΔ
2. γωνία ΑΔΒ	β) γωνία ΑΓΔ
3. γωνία ΒΑΔ	γ) γωνία ΑΔΓ

(Μονάδες 6)

13682. Στο διπλανό σχήμα, το Μ είναι ένα τυχαίο σημείο της ημιευθείας Οx και Β, Γ είναι σημεία τέτοια, ώστε ΒΟx = ΓΟx και ΟΒ = ΟΓ.



α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΒΜ και ΟΓΜ και να δικαιολογήσετε ότι είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις με τις άλλες ίσες γωνίες που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των δυο τριγώνων ΟΒΜ και ΟΓΜ.
1. Η γωνία ΟΒΜ του τριγώνου ΟΒΜ είναι ίση με την γωνία …….. του τριγώνου ΟΓΜ.
2. Η γωνία ……. του τριγώνου ΟΒΜ είναι ίση με την γωνία ΓΜΟ του τριγώνου ΟΓΜ. (Μονάδες 6)

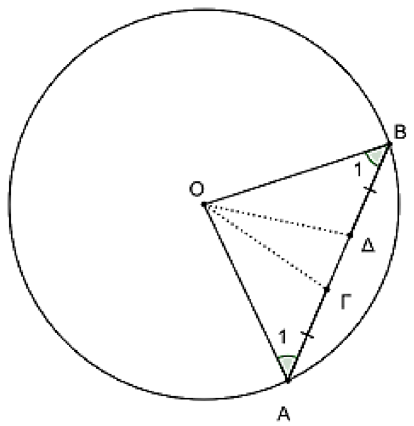
γ) Είναι οι γωνίες ΒΜx και ΓΜx είναι ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

13683. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση την πλευρά ΒΓ.

α) Να γράψετε τις ισότητες που αφορούν τις πλευρές και τις γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) Από τις κορυφές Β και Γ φέρνουμε τις διαμέσους ΒΜ και ΓΝ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.
i. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΒΓΜ και ΓΒΝ και να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα. (Μονάδες 12)
ii. Να εξηγήσετε γιατί οι διάμεσοι ΒΜ και ΓΝ είναι ίσες. (Μονάδες 5)

13685. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Πάνω στη χορδή ΑΒ παίρνουμε σημεία Γ και Δ τέτοια, ώστε ΑΓ = ΒΔ.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές και ότι οι γωνίες του A_1 και B_1 είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

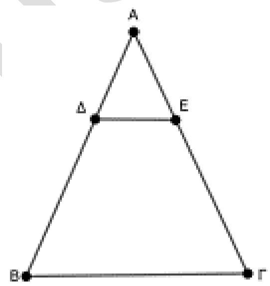
(Μονάδες 12)

γ) Είναι ίσα τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

4ο Θέμα

12512. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$ και στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

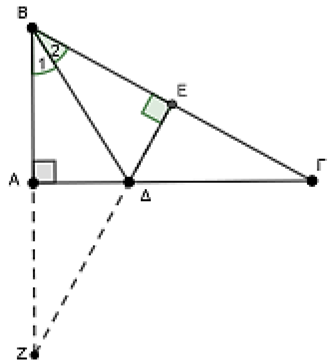
β) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

γ) Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

ii. το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

12698. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β. Από το Δ φέρουμε ΔΕ⊥ΒΓ και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α). Να αποδείξετε ότι:

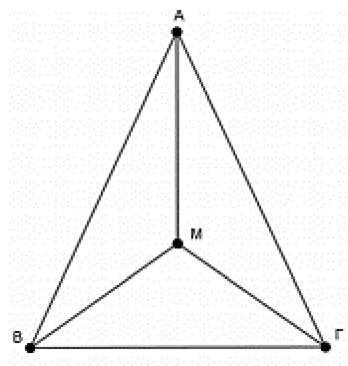


α) ΑΔ = ΔΕ και ΑΒ = ΕΒ (Μονάδες 10)

β) ΔΖ = ΔΓ (Μονάδες 10)

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

12699. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και σημείο Μ, εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε ΜΒ = ΜΓ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η ΜΑ διχοτομεί τη γωνία Α.

(Μονάδες 7)

γ) Προεκτείνουμε την ΑΜ προς το μέρος του Μ και η προέκταση τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι το ΜΔ είναι ύψος του τριγώνου ΜΒΓ.

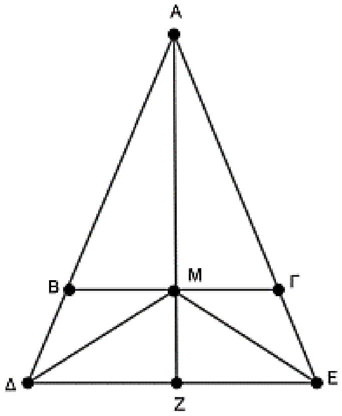
(Μονάδες 8)

12837. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα ώστε ΒΔ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Αν η ΑΜ προεκτεινόμενη προς το Μ, τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ, να αιτιολογήσετε ότι η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ. (Μονάδες 7)

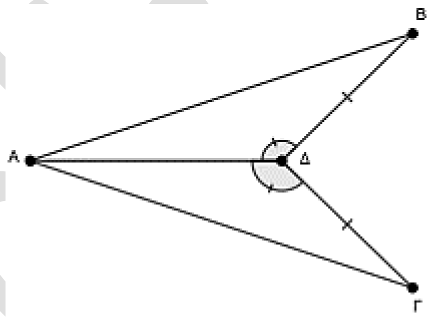


12840. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι ισχύουν: ΔΒ = ΔΓ και $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΔΓ}$.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ. (Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί $\widehat{ΔΑΒ} = \widehat{ΔΑΓ}$. (Μονάδες 7)

γ) Φέρνουμε τη ΒΓ. Αν η ΑΔ προεκτεινόμενη προς το Δ, τέμνει την ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι το Ε είναι το μέσο της ΒΓ. (Μονάδες 8)

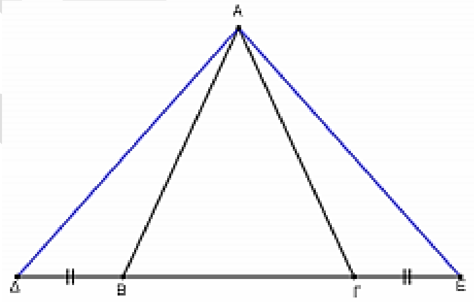


12972. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στις προεκτάσεις της πλευράς ΒΓ και προς τα δύο άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ=ΓΕ όπως στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{Β}_{εξ} = \widehat{Γ}_{εξ}$ (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι τα τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Α. Συμφωνείτε ή όχι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



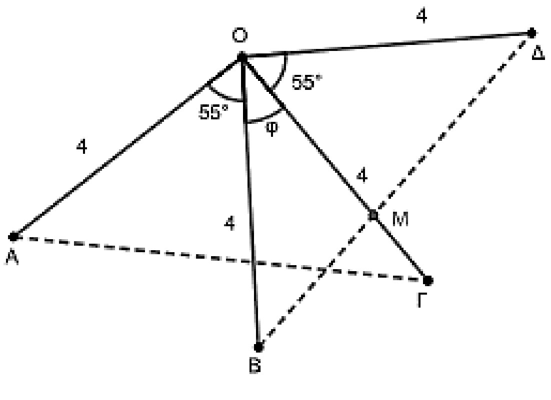
12974. Για τις γωνίες του παρακάτω σχήματος δίνεται ότι: $\widehat{ΑΟΒ} = \widehat{ΓΟΔ} = 55^\circ$, $\widehat{ΒΟΓ} = φ$ και ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ=4.

α) Να αποδείξετε ότι:

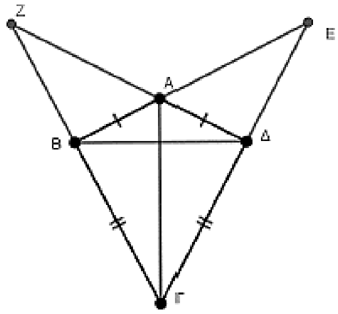
i. Οι γωνίες ΑΟΓ και ΒΟΔ είναι ίσες. (Μονάδες 8)

ii. Τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Αν Μ είναι το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ, πόσες μοίρες θα έπρεπε να είναι η γωνία φ, ώστε το σημείο Μ να είναι το μέσο του τμήματος ΒΔ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



13287. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΑΔ και ΓΒ = ΓΔ. Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΓΔ τέμνονται στο Ε, και οι προεκτάσεις των ΔΑ και ΓΒ τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

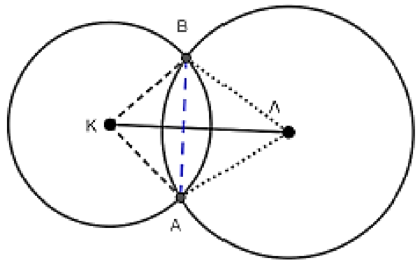


α) Η ΓΑ είναι η διχοτόμος της γωνίας Γ. (Μονάδες 9)

β) Οι γωνίες $Z\hat{A}\Gamma$ και $E\hat{A}\Gamma$ είναι ίσες. (Μονάδες 8)

γ) ΓΖ = ΓΕ. (Μονάδες 8)

13288. Στο διπλανό σχήμα δίνονται δύο τεμνόμενοι κύκλοι με κέντρα τα σημεία Κ, Λ και έστω Α, Β τα σημεία τομής τους. Να αποδείξετε ότι:



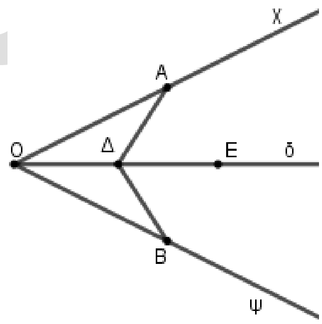
α) Τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΒΚΛ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΒ είναι ισοσκελή με βάση την ΑΒ. (Μονάδες 6)

γ) Η ΚΛ είναι:

i. διχοτόμος της γωνίας $A\hat{K}B$. (Μονάδες 6)
ii. κάθετη στη χορδή ΑΒ. (Μονάδες 7)

13496. Δίνεται η γωνία $x\hat{O}\psi$ και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στις Οx και Οψ παίρνουμε σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε ΟΑ = ΟΒ. Πάνω στην Οδ θεωρούμε σημεία Δ και Ε όπως φαίνονται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

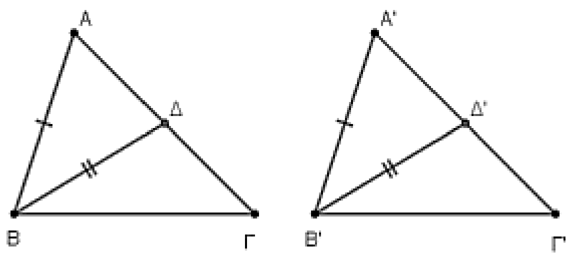


α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 09)

β) $A\hat{\Delta}E = B\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 07)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι ΑΕ = ΒΕ. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 09)

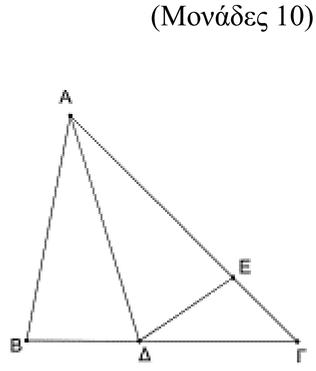
13502. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος με ΑΓ = Α΄Γ΄, ΑΒ = Α΄Β΄. Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β΄Δ΄ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{A} = \hat{A}'$. (Μονάδες 15)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα στοιχεία που έχουμε δεν αρκούν για να θεωρήσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

13530. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 10 και ΑΓ = 14 και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΓΕ = 4.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα τμήματα ΒΔ, ΔΕ. (Μονάδες 5)

γ) Προεκτείνουμε την ΕΔ προς το Δ κατά τμήμα ΔΖ, ώστε ΔΖ = ΔΕ. Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{B}Z = \Delta\hat{Z}B$. (Μονάδες 10)

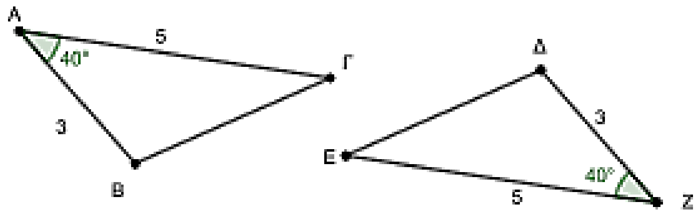
13794. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΒΑ προς το Α και ΓΑ προς το Α, παίρνουμε σημεία Ε και Δ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{B\Gamma E}$. (Μονάδες 9)
γ) Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΜΔ=ΜΕ. (Μονάδες 7)

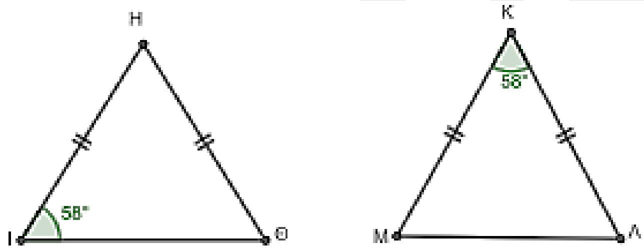
13795. Στις πλευρές μίας γωνίας $x\widehat{O}y$ παίρνουμε τα σημεία Α, Β στην Οx και Γ, Δ στην Οy, ώστε ΟΑ=ΟΓ και ΟΒ=ΟΔ. Έστω Μ τυχαίο σημείο της διχοτόμου της γωνίας $x\widehat{O}y$.
α) Να αποδείξετε ότι ΜΒ=ΜΔ. (Μονάδες 9)
β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{AMB} = \widehat{\Gamma M\Delta}$. (Μονάδες 9)
γ) Να αποδείξετε ότι $\widehat{AMO} = \widehat{\Gamma MO}$. (Μονάδες 7)

13284.α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ του παρακάτω σχήματος είναι ίσα



(Μονάδες 15)

β) Ο Φοίβος και η Αθηνά, δύο μαθητές της Α΄ Λυκείου, μελετούν παρέα Γεωμετρία. Μεταξύ τους γίνεται ο εξής διάλογος, καθώς συγκρίνουν τα τρίγωνα του σχήματος που ακολουθεί:

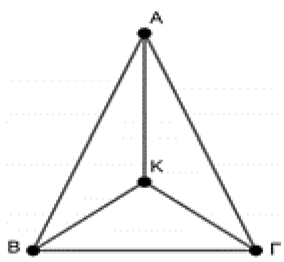


– Φ : Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ίσες μια προς μία, αφού ΗΙ = ΚΜ και ΗΘ = ΚΛ, και από μία γωνία ίση, αυτή που σημειώνεται με 58^o, οπότε θα είναι μεταξύ τους ίσα.
– Α : Πράγματι έχουν δυο πλευρές τους ίσες μία προς μία, αλλά η γωνία των 58^o είναι σε διαφορετική θέση σε σχέση με τις ίσες πλευρές στα δύο τρίγωνα. Νομίζω ότι μπορώ να αποδείξω ότι τα τρίγωνα ΗΘΙ και ΚΛΜ δεν είναι ίσα.

i. Να εξηγήσετε τι εννοεί η Αθηνά σχετικά με τη διαφορετική θέση της γωνίας των 58^o.
ii. Με ποιόν από τους δύο μαθητές συμφωνείτε; Αν νομίζετε ότι έχει δίκιο ο Φοίβος, δικαιολογήστε γιατί. Αν νομίζετε ότι έχει δίκιο η Αθηνά, βοηθήστε την να ολοκληρώσει την απόδειξή της.
(Μονάδες 10)

3^o Θέμα

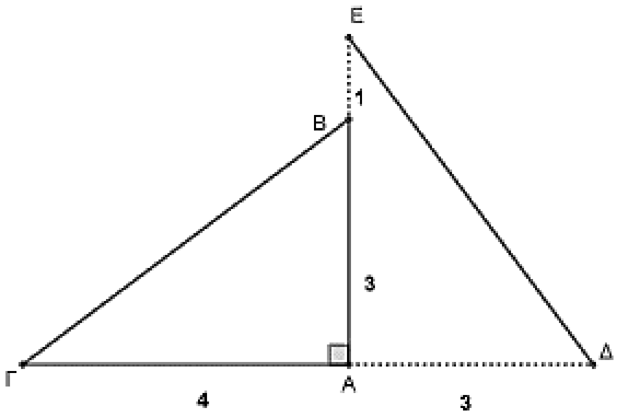
12527. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου, τέτοιο ώστε ΚΒ=ΚΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) οι γωνίες ΚΒΓ και ΚΓΒ είναι ίσες. (Μονάδες 5)
β) τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΓΑΚ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
γ) η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ. (Μονάδες 10)



ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

2ο Θέμα

13680. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ με $\widehat{BA\Gamma}=90^\circ$ είναι ΒΑ = 3 και ΑΓ = 4. Προεκτείνουμε την πλευρά ΓΑ (προς το μέρος του Α) και παίρνουμε τμήμα ΑΔ = 3 και την πλευρά ΑΒ (προς το μέρος του Β) κατά τμήμα ΒΕ = 1.



α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ορθογώνιο. Είναι ο ισχυρισμός του σωστός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

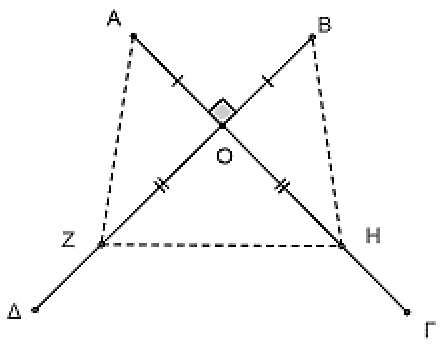
β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΑΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

γ) Να συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις με τις ίσες γωνίες που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ του β) ερωτήματος.

- Η γωνία $\widehat{B\Gamma A}$ του τριγώνου ΒΑΓ είναι ίση με τη γωνία …… του τριγώνου ΔΑΕ.
- Η γωνία $\widehat{A\Delta E}$ του τριγώνου ΔΑΕ είναι ίση με τη γωνία …… του τριγώνου ΒΑΓ. (Μονάδες 6)

4ο Θέμα

13688. Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα στο σημείο Ο έτσι ώστε ΟΑ = ΟΒ. Πάνω στα τμήματα ΟΓ και ΟΔ θεωρούμε τα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΗ = ΟΖ.



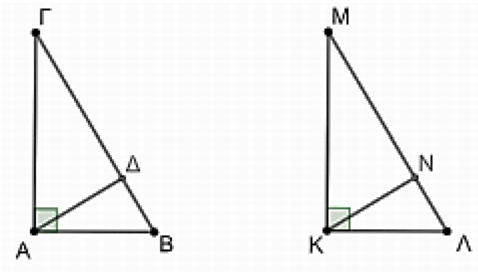
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΖ και ΟΒΗ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Δύο από τις παρακάτω τέσσερεις ισότητες προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων ΟΑΖ και ΟΒΗ του α) ερωτήματος. Να βρείτε ποιες ισότητες είναι και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1. $\widehat{OAZ}=\widehat{OBH}$
2. $\widehat{AOB}=\widehat{ZOH}$
3. ΑΖ = ΒΗ
4. ΑΗ = ΒΖ (Μονάδες 10)

γ) Τι θα αλλάζατε ή θα προσθέτατε στα δεδομένα ώστε να προκύπτει ως συμπέρασμα ότι το τμήμα ΖΗ είναι ίσο με τα τμήματα ΑΖ και ΒΗ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

13779. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι ορθογώνια με $\hat{A}=\hat{K}=90^\circ$ και ΑΓ = ΚΜ, ΒΓ = ΛΜ. Επίσης τα ΑΔ και ΚΝ είναι ύψη των τριγώνων:



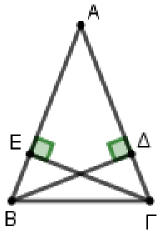
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι ίσα . (Μονάδες 5)
β) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΚΝ. (Μονάδες 10)
γ) Ποιο συμπέρασμα βγαίνει από το (β) για τα μήκη των αντίστοιχων υψών ίσων ορθογωνίων, όπως τα ΑΔ και ΚΝ; (Μονάδες 5)
δ) Να σχεδιάσετε τα ύψη ΔΕ και ΝΡ των τριγώνων ΑΔΒ και ΚΝΛ και να αποδείξετε ότι είναι ίσα. (Μονάδες 5)

13793. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και το ύψος του ΑΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ προς το Β και ΑΓ προς το Γ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε ΒΕ=ΓΖ.

α) Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ (Μονάδες 7)
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 9)
γ) Αν ΔΚ είναι το ύψος του τριγώνου ΕΔΖ, να αποδείξετε ότι ΕΚ=ΚΖ . (Μονάδες 9)

3ο Θέμα

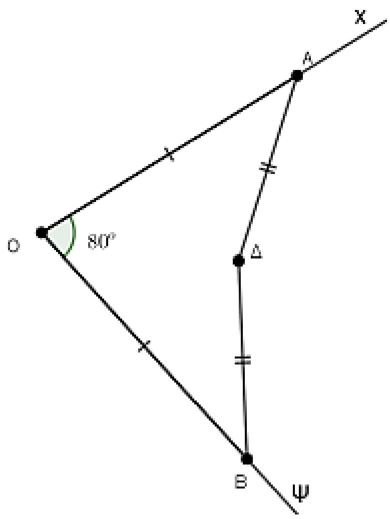
13788. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρνουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.
α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 5)
γ) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΕ και ΑΔ είναι ίσα. (Μονάδες 10)



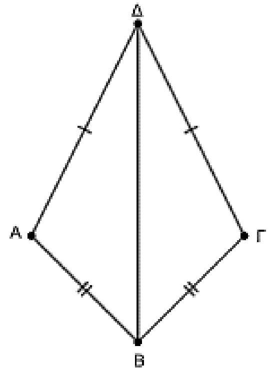
ΚΥΚΛΟΣ – ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ - ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ

4ο Θέμα

13503. Δίνεται η γωνία $\chi\hat{O}\psi = 80^\circ$. Πάνω στις πλευρές Οχ και Οψ παίρνουμε σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε ΟΑ = ΟΒ. Έστω Δ σημείο στο εσωτερικό της γωνίας $\chi\hat{O}\psi$ τέτοιο, ώστε ΑΔ = ΒΔ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
ii. $A\hat{O}\Delta = 40^\circ$. (Μονάδες 07)
β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η ΔΟ είναι μεσοκάθετος της ΑΒ. Συμφωνείτε μαζί του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 08)



13651.Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι ΑΔ = ΓΔ και ΑΒ = ΓΒ.



α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ. (Μονάδες 10)

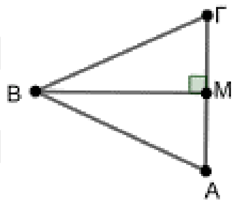
β) Να αποδείξετε ότι η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΓ. (Μονάδες 5)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «η ΔΒ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ». Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

2ο Θέμα

13786.Στο σχήμα το Μ είναι μέσο της ΑΓ και τα τμήματα ΑΓ και ΒΜ είναι κάθετα.



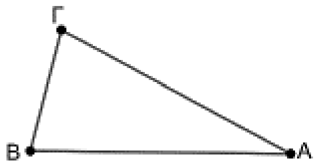
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Το παρακάτω σχήμα είναι η κάτοψη ενός κήπου. Η πλευρά του κήπου που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΓ της κάτοψης έχει μήκος 12 μέτρα. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 40 μέτρα φράχτη.

i. Πόσα μέτρα φράχτη χρειαζόμαστε για την πλευρά του κήπου που αντιστοιχεί στην ΑΒ της κάτοψης;

ii. Αν αφήσουμε χωρίς φράχτη μόνο το μέρος του κήπου που αντιστοιχεί στο ΑΜ, τότε πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε; (Μονάδες 12)

13789.Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι ΑΒ = ΑΓ και $B > A$.
Να αποδείξετε ότι:



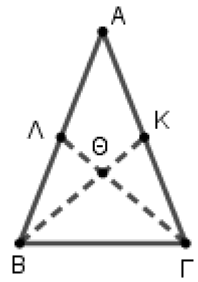
α) Οι γωνίες B, Γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες. (Μονάδες 10)

β) ΑΓ>ΒΓ. (Μονάδες 10)

γ) Η μικρότερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι η A. (Μονάδες 5)

4ο Θέμα

13690.Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τις διαμέσους του ΒΚ και ΓΛ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Θ.



α) i. Να δικαιολογήσετε γιατί είναι ΛΒ = ΚΓ (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΛΒΓ και ΚΓΒ είναι ίσα. (Μονάδες10)

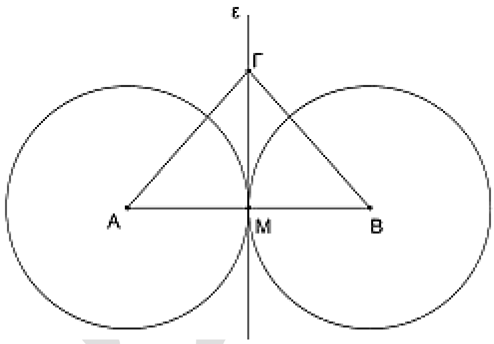
β) Τι είδους τρίγωνο είναι το ΒΘΓ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Αν η διάμεσος ΒΚ είναι και ύψος του τριγώνου ΑΒΓ στην πλευρά του ΑΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 5)

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ

4ο Θέμα

13531. Δύο ίσοι κύκλοι (Α, ρ) και (Β, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Μ. Στην κοινή εφαπτομένη ε των κύκλων στο σημείο Μ παίρνουμε ένα σημείο Γ, διαφορετικό του Μ.



α) Πόσων μοιρών είναι η γωνία $\widehat{AMB}$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

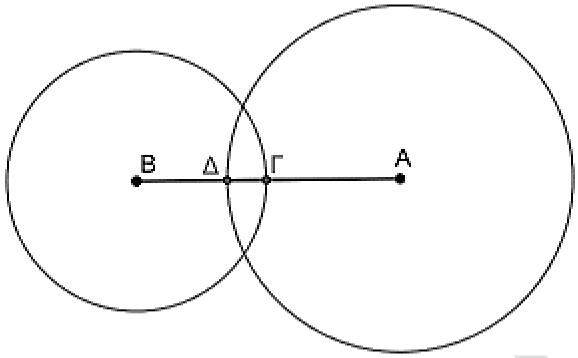
β) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = ΒΓ. (Μονάδες 10)

γ) Πόσων μοιρών πρέπει να είναι η γωνία $\widehat{MA\Gamma}$, ώστε η ΑΓ να είναι κάθετη στη ΒΓ; (Μονάδες 7)

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

2ο Θέμα

13775. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο κύκλοι με κέντρα τα σημεία Α και Β. Ο κύκλος με κέντρο το Α έχει ακτίνα 4 και ο κύκλος με κέντρο το Β έχει ακτίνα 3.

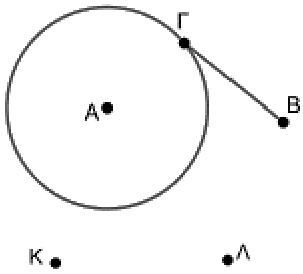


α) Ποια είναι τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΓ και ΑΔ και γιατί; (Μονάδες 10)
β) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας
i. Το μήκος του ΑΒ είναι ίσο με 7.
ii. Το μήκος του ΑΒ είναι μικρότερο από 7.
iii. Το μήκος του ΑΒ είναι μεγαλύτερο από 7 (Μονάδες 15)

4ο Θέμα

13498. Θεωρούμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με R = 4, ρ = 3 και ΚΛ = 5.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω Α και Β. (Μονάδες 10)
ii. $\hat{ΑΛΚ} > \hat{ΛΚΑ}$. (Μονάδες 10)
β) Πόσο πρέπει να είναι το μήκος της ακτίνας ρ έτσι ώστε οι γωνίες $\hat{ΑΛΚ}$ και $\hat{ΛΚΑ}$ να είναι ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

13783. Ο κύκλος με κέντρο Α έχει ακτίνα 4. Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έχει μήκος 5 και η απόσταση των Α και Β είναι 7.



α) Να βρείτε ένα σημείο Δ του κύκλου (Α, 4), διαφορετικό από το Γ τέτοιο ώστε ΒΔ = 5. (Μονάδες 13)

β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ με άκρα τα σημεία Κ και Λ του σχήματος έχει μήκος 7. Ένα σημείο Μ απέχει 4 από το ένα άκρο του ΚΛ και 5 από το άλλο άκρο του. Πόσες είναι οι θέσεις στο επίπεδο που μπορεί να βρίσκεται το Μ; Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Παραλληλία

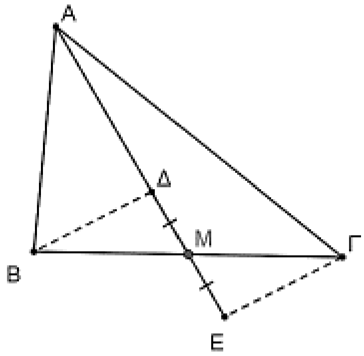
2ο Θέμα

13686. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσός του ΑΜ και σημείο της Δ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ προς το μέρος του Μ κατά τμήμα ΜΕ = ΜΔ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Είναι οι γωνίες ΒΔΜ και ΓΕΜ των τριγώνων ΜΒΔ και ΜΓΕ ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι παράλληλα. (Μονάδες 6)

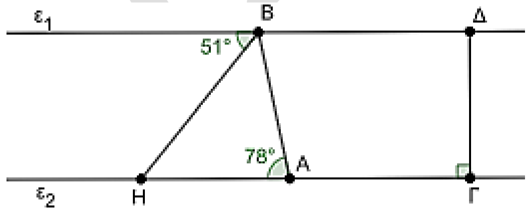


13821. Στο παρακάτω σχήμα η ΒΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $AB\varepsilon_1$. Επίσης δίνονται οι γωνίες $BAH = 78^\circ$, $HB\varepsilon_1 = 51^\circ$ και η ΑΓΔ είναι ορθή.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΒΗ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΔΓ. (Μονάδες 5)



4ο Θέμα

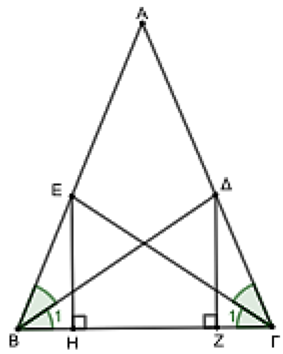
12970. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών του Β και Γ αντίστοιχα. Φέρουμε $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

  i. τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

  ii. ΕΗ=ΔΖ. (Μονάδες 8)

β) Να ονομάσετε Ρ το σημείο τομής των διχοτόμων ΒΔ και ΓΕ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Το τμήμα ΡΜ είναι παράλληλο στα τμήματα ΕΗ και ΔΖ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

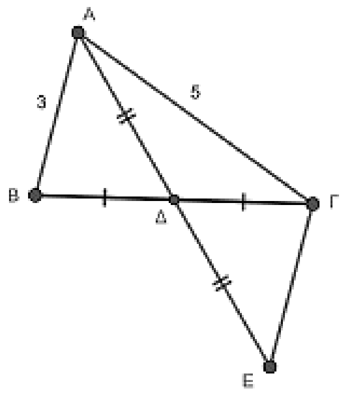


13001. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, στο οποίο ΑΒ = 3, ΑΓ = 5. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΔ και στην προέκτασή της προς το Δ παίρνουμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΔ = ΔΕ.

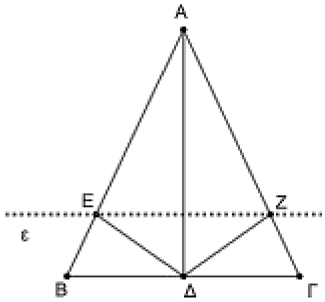
α) i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

  ii. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΕ. (Μονάδες 4)

β) Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε στο σχήμα αποτελούν τις θέσεις πέντε χωριών σε ένα σχέδιο και τα μήκη που δίνονται είναι οι χιλιομετρικές αποστάσεις μεταξύ των χωριών. Επιπλέον δίνεται ότι η απόσταση ΓΕ είναι 3 χιλιόμετρα. Ένας συμμαθητής σας πήγε από το χωριό Α στο χωριό Ε ακολουθώντας τη διαδρομή ΑΔΕ. Χρησιμοποίησε μια εφαρμογή που είχε στο κινητό του για να μετράει τις αποστάσεις που διανύει και είδε ότι είχε κάνει 8,5 χιλιόμετρα. Είναι αυτό δυνατόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)



13446. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Φέρουμε μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την ΒΓ η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.



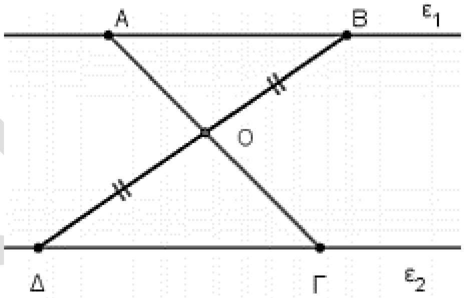
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AEZ = B$ και $AZE = \Gamma$ (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές . (Μονάδες 9)

β) Αν η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

13495. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και το σημείο Ο είναι μέσο του ΒΔ.

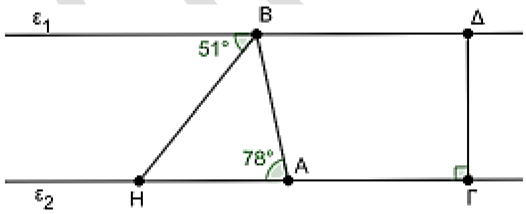


α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ΑΒΟ και ΓΔΟ είναι ίσες. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΓΔΟ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η ΑΔ είναι παράλληλη στην ΒΓ. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντηση σας. (Μονάδες 05)

13821. Στο παρακάτω σχήμα η ΒΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $AB\varepsilon_1$. Επίσης δίνονται οι γωνίες $BAH = 78^\circ$, $HB\varepsilon_1 = 51^\circ$ και η ΑΓΔ είναι ορθή.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία ABH. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\Delta\Gamma$. (Μονάδες 5)

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

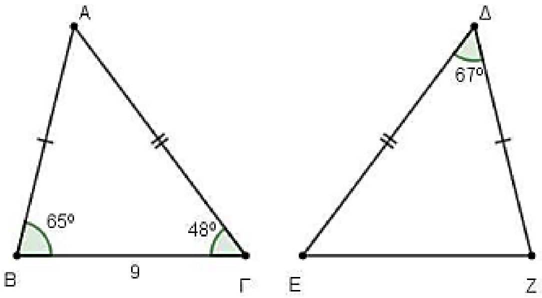
2ο Θέμα

12359. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΖΕ με ΑΒ = ΔΖ, ΑΓ = ΔΕ, $B = 65^\circ$, $\Gamma = 48^\circ$, $\Delta = 67^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 67^o$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΖΕ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) Αν ΒΓ = 9 να υπολογίσετε την πλευρά ΕΖ. (Μονάδες 7)

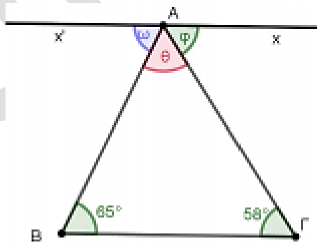


12463. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $A = 80^o$. Έστω ΒΔ το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Β. Να υπολογίσετε:

α) Τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

β) Τη γωνία ΔΒΓ. (Μονάδες 10)

12464. Στο σχήμα που ακολουθεί η x΄x διέρχεται από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ. Αν ξέρετε ότι για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ είναι $B = 65^\circ$ και $\Gamma = 58^\circ$:



α) Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας :

i. Είναι κάποια από τις σημειωμένες γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$ ή $\hat{\theta}$ ίση με 65^o; (Μονάδες 7)

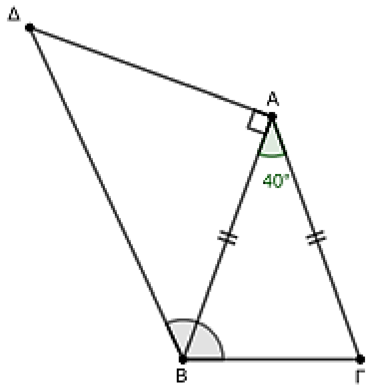
ii. Είναι κάποια από τις σημειωμένες γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$ ή $\hat{\theta}$ ίση με 58^o; (Μονάδες 7)

β) Να γράψετε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$ και $\hat{\theta}$ (Μονάδες 2, 2 ,7)

12456. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $A = 40^o$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Με πλευρά την ΑΒ και εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να δικαιολογήσετε γιατί η γωνία ΔΒΓ είναι ίση με 115^o. (Μονάδες 13)

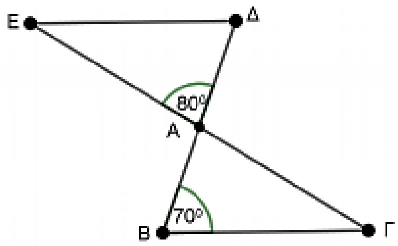


12511. Στο παρακάτω σχήμα το Α είναι μέσο των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ και ΓΕ. Αν η γωνία ΑΒΓ ισούται με 70^o και η γωνία ΔΑΕ ισούται με 80_o τότε:

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

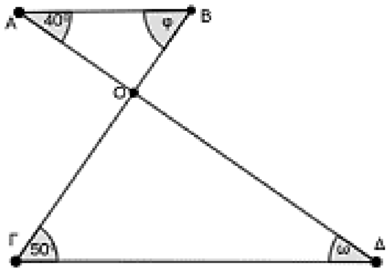
γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 9)



12532. Δίνονται τα παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ του παρακάτω σχήματος. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΔ τέμνονται στο Ο, τότε:

α) Να υπολογίσετε σε μοίρες τις γωνίες ω και φ. (Μονάδες 12)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ. (Μονάδες 13)

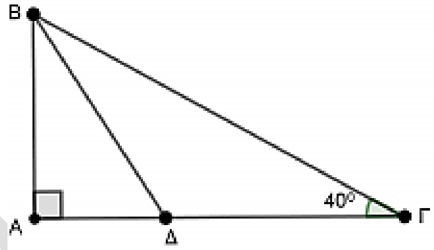


12533. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{Α} = 90^\circ$ και $\Gamma = 40^\circ$, η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β. Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας να υπολογίσετε:

α) πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

β) πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΒΔ. (Μονάδες 7)

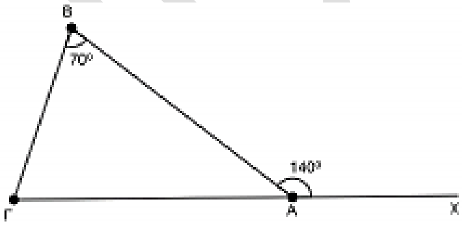
γ) πόσες μοίρες είναι η γωνία ΒΔΑ. (Μονάδες 9)



12534. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία της Α, είναι ίση με 140^o. Επίσης η γωνία του Β ισούται με 70^o.

α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία Α του τριγώνου. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 15)



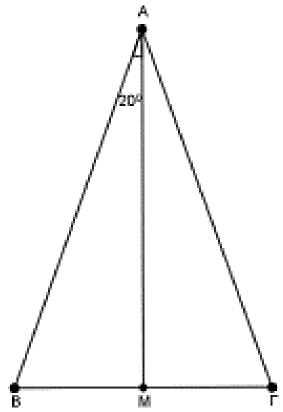
12536. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ και η ΑΜ είναι διχοτόμος του τριγώνου.

α) Αν η ΑΓ=5 , να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ. (Μονάδες 6)

β) Αν η γωνία ΒΑΜ είναι ίση με 20^o, να υπολογίσετε:

i. πόσες μοίρες είναι η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

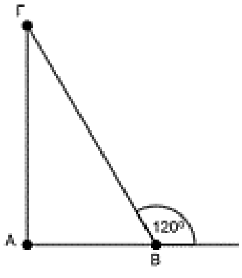
ii. πόσες μοίρες είναι οι γωνίες Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 13)



12537. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία της Β ισούται με 120^o.

α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία Β του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

β) Αν η γωνία Γ του τριγώνου είναι ίση με 30^o να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 15)

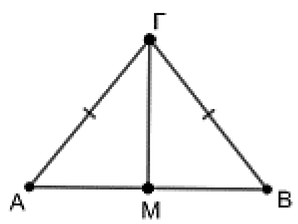


12658. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΒΓ και η γωνία ΓΑΒ είναι η ίση με 55^o.

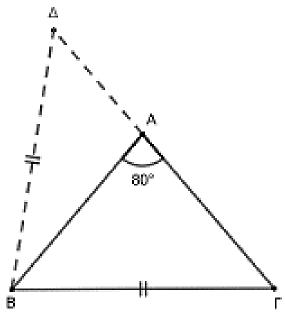
α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΓΒΑ. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΓΒ. (Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον το ΓΜ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να υπολογίσετε τη γωνία ΑΓΜ. (Μονάδες 8)



12962. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με γωνία $A = 80^{\circ}$. Έστω Δ σημείο στην προέκταση της πλευράς ΑΓ προς το μέρος του Α, τέτοιο ώστε ΒΔ=ΒΓ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 12)

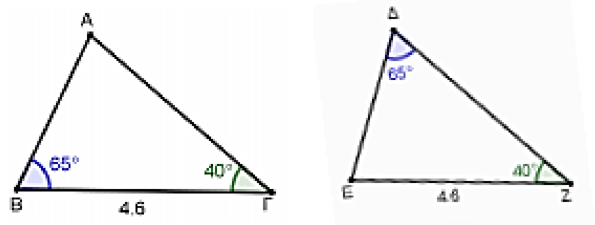
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΓΒΔ είναι ίση με τη γωνία Α .

(Μονάδες 13)

12964. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ και ΚΛΗ στα οποία είναι σημειωμένες δύο γωνιές τους και επιπλέον οι πλευρές ΒΓ, ΕΖ και ΛΗ είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή ΒΓ = ΕΖ = ΛΗ = 4,6.

α) Να υπολογίσετε τις τρίτες γωνίες τους Α, Ε και Η αντίστοιχα των τριών τριγώνων. (Μονάδες 12)

β) Δύο από τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος είναι ίσα μεταξύ τους. Να γράψετε ποια είναι αυτά δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

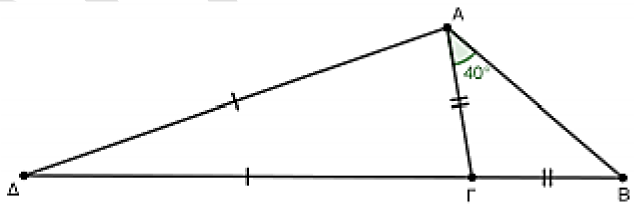


12965. Δίνονται ισοσκελές τρίγωνο ΔΑΓ με ΔΑ = ΔΓ. Στην προέκταση της ΔΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε σημείο Β τέτοιο ώστε ΓΒ = ΓΑ.

Αν $ΓΑΒ = 40^{\circ}$, να υπολογίσετε:

α) Τις γωνίες του τριγώνου ΓΑΒ. (Μονάδες 12)

β) Τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΓ. (Μονάδες 13)

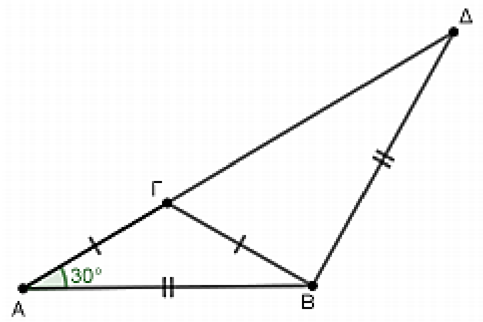


12968. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΔ με ΒΑ=ΒΔ. Έστω Γ ένα εσωτερικό σημείο της ΑΔ τέτοιο ώστε ΓΑ = ΓΒ. Αν η γωνία Α του τριγώνου ΒΑΔ είναι ίση με 30° .

α) Να υπολογίσετε:

- **i.** τις γωνίες του τριγώνου ΓΑΒ. (Μονάδες 10)
- **ii.** τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ. (Μονάδες 10)

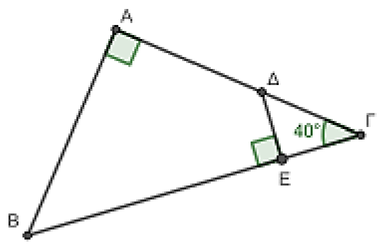
β) Ποια είναι η σχέση της γωνίας ΑΒΔ με τη γωνία Α ; (Μονάδες 5)



13000. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^{\circ}$ και $Γ = 40^{\circ}$.Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΒΓ. Να υπολογίσετε :

α) Τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ. (Μονάδες 10)

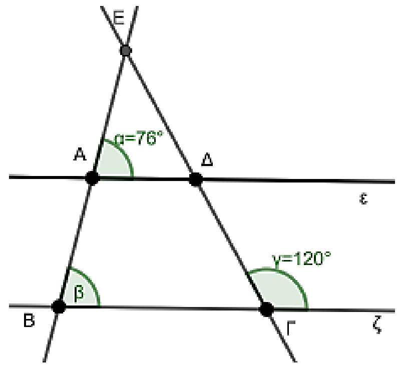
β) Τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΔΕΒ. (Μονάδες 15)



13004. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες με $\hat{\alpha}=76^\circ$ και $\hat{\gamma}=120^\circ$. Να βρείτε:

α) Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{\beta}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.
(Μονάδες 10)

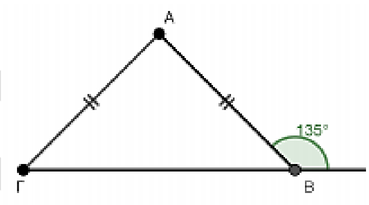
β) Πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{E}\Gamma$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.
(Μονάδες 15)



13230. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, δίνεται ότι ΑΒ = ΑΓ και $B_{\varepsilon\xi}=135^\circ$.

α) Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
(Μονάδες 15)

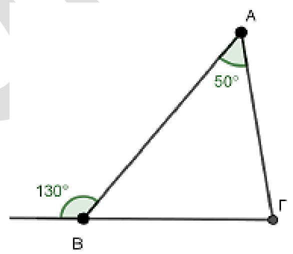
β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές καθώς και το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 10)



13293. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $B_{\varepsilon\xi}=130^\circ$ και $A=50^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
(Μονάδες 12)

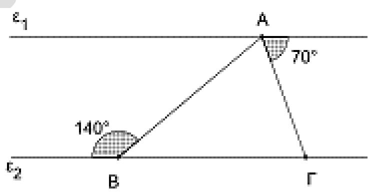
β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές και να γράψετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του και ποια είναι η βάση του.
(Μονάδες 13)



13437. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε που ορίζεται από τις κορυφές Β και Γ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Β του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

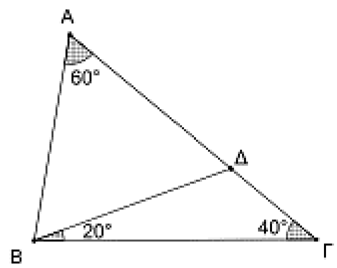
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες Γ και Α του τριγώνου ΑΒΓ.
(Μονάδες 15)



13438. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A=60^\circ$ και $\Gamma=40^\circ$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $\Gamma B\Delta=20^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΒ. (Μονάδες 12)

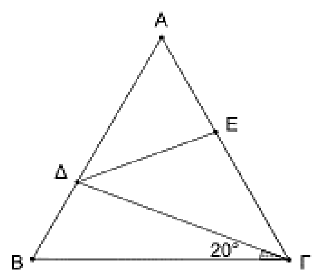
β) Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΔ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 13)



13439. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΑΒ ώστε $B\Gamma\Delta=20^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta\Gamma=80^\circ$.
(Μονάδες 12)

β) Αν η διχοτόμος της γωνίας ΑΔΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι $E\Delta\Gamma=E\Gamma\Delta$.
(Μονάδες 13)



13492. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΖΕ με $ΑΒ = ΔΖ$, $Β = 75^o$, $Α = 40^o$, $Δ = 40^o$ και $Ε = 65^o$.

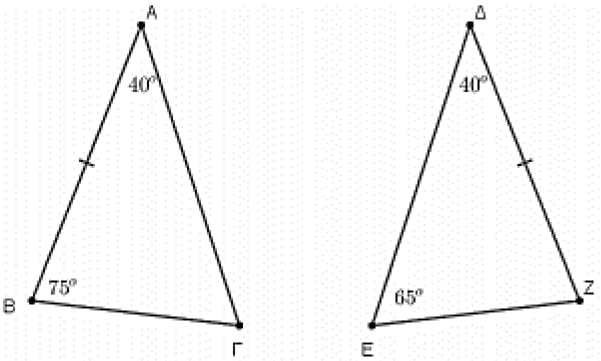
α) Να αποδείξετε ότι $Ζ = 75^o$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΖΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) Αν ΑΓ = 8, να υπολογίσετε την ΔΕ.

(Μονάδες 8)



13493. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Από σημείο Ρ εκτός του κύκλου φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν είναι ΡΑ = 8 και $ΑΡΒ = 40^o$, τότε να υπολογίσετε:

α) Το εφαπτόμενο τμήμα ΡΒ.

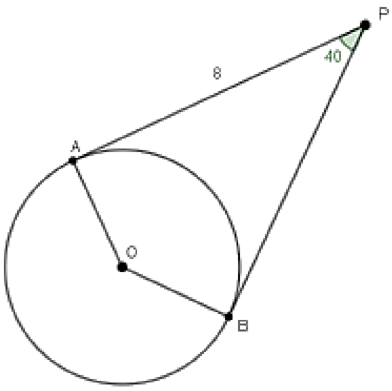
(Μονάδες 07)

β) Την ΑΡΟ.

(Μονάδες 09)

γ) Την ΡΟΒ.

(Μονάδες 08)



13494. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με ΒΓ = ΕΖ και $Γ = Ζ = 30^o$.

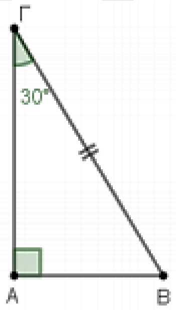
α) Να υπολογίσετε τη γωνία Ε.

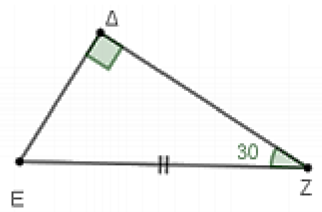
(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) Αν είναι ΑΒ = 5, τότε να βρείτε το μήκος της ΔΕ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.





(Μονάδες 07)

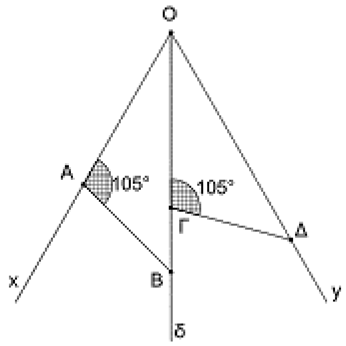
13529. Στο διπλανό σχήμα η γωνία xOy είναι 60^o. Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας xOy και ισχύει ΟΑ = ΟΓ. Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΑΒ.

(Μονάδες 12)

β) να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ και να αιτιολογήσετε γιατί είναι ΑΒ = ΓΔ.

(Μονάδες 13)

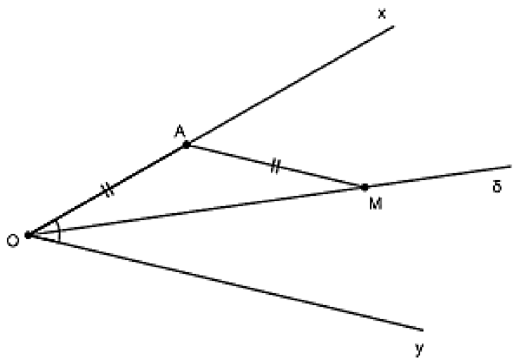


13624. Σχεδιάζουμε γωνία $xOy = 40^o$ και παίρνουμε τυχαίο σημείο Α πάνω στην πλευρά Οx. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας xOy και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε ΑΟ = ΑΜ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $δOy$. (Μονάδες 10)

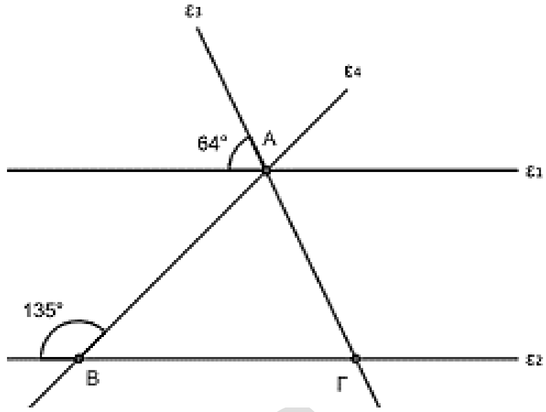
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.

(Μονάδες 10)



γ) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΟΜ ως προς τις γωνίες του και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

13627.Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 οι οποίες τέμνονται από τις ευθείες ε_3 και ε_4 στα σημεία Α, Β και Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

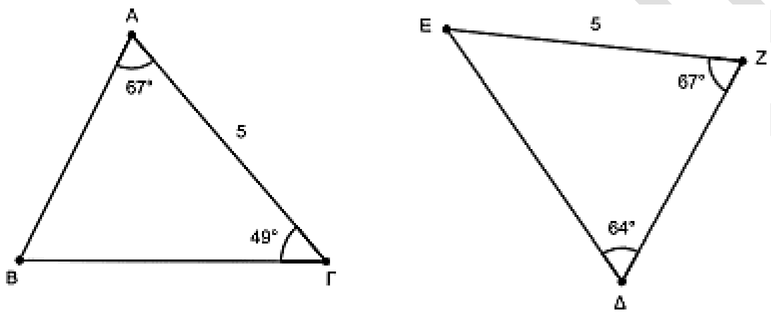


α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma B A = 45^{o}$ και $A\Gamma B = 64^{o}$.
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $BA\Gamma$.
(Μονάδες 8)

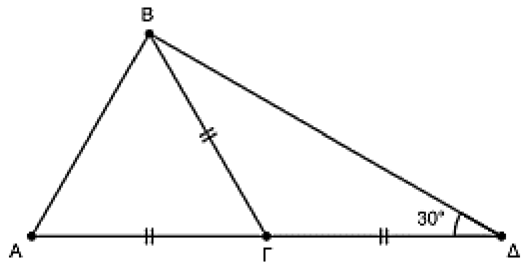
γ) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 5)

13631.Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του σχήματος με ΑΓ = 5, $A = 67^{o}$, $\Gamma = 49^{o}$, ΕΖ = 5, $\Delta = 64^{o}$ και $Z = 67^{o}$.



α) Να αποδείξετε ότι $B = 64^{o}$ και $E = 49^{o}$. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 9)
γ) Να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τις δύο επόμενες ισότητες, οι οποίες προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ, και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας: ΒΓ = …… , ΑΒ = ….. (Μονάδες 6)

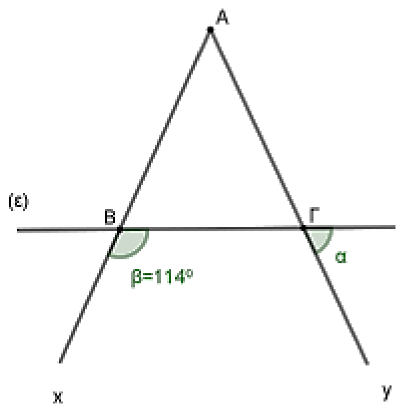
13673.Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι ΑΓ = ΓΒ = ΓΔ και $\Delta = 30^{o}$.



α) Να αποδείξετε ότι $\Delta B\Gamma = 30^{o}$ και $\Delta\Gamma B = 120^{o}$.
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\Gamma A$. (Μονάδες 8)
γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.
(Μονάδες 9)

13684.Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ημιευθείες Αx και Αy τέμνονται από την ευθεία (ε) στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Έστω ότι οι γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\alpha}$ είναι παραπληρωματικές με $\hat{\beta} = 114^{\circ}$.

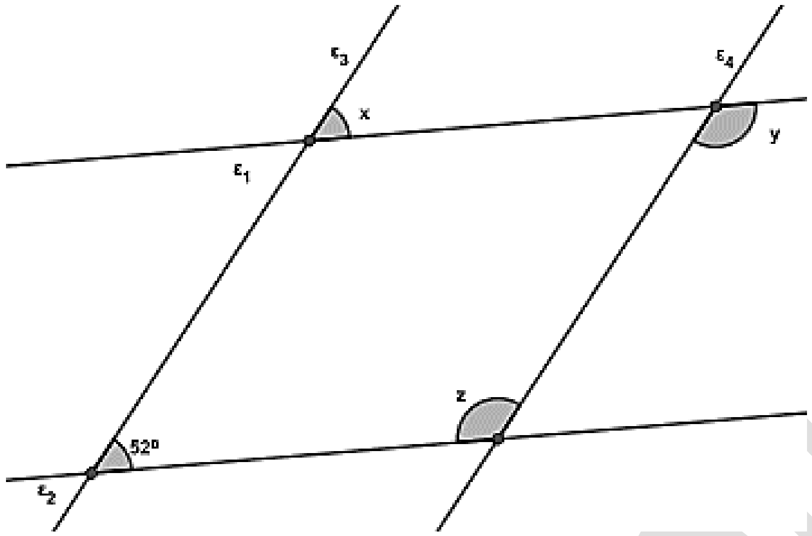


α) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι $AB\Gamma = A\Gamma B = 66^{o}$.
(Μονάδες 10)

β) Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 6)

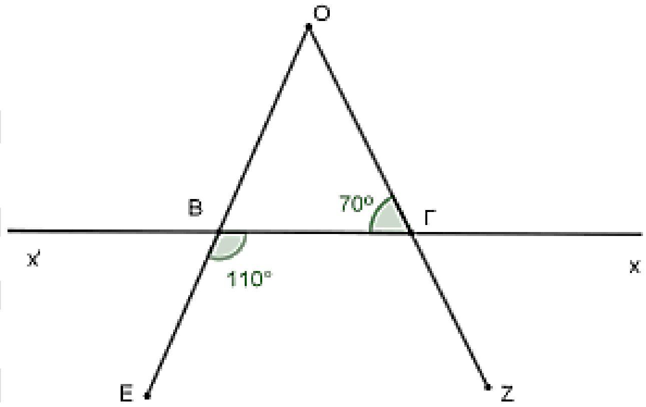
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $BA\Gamma$.
(Μονάδες 9)

13787.Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{x}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 9)
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{z}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 9)
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{y}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

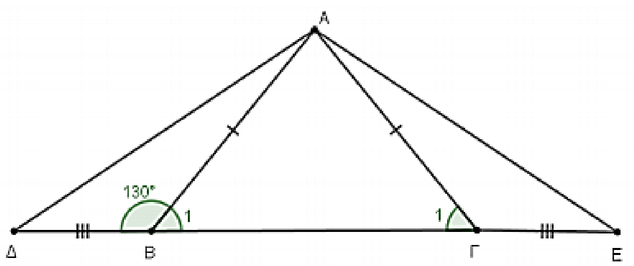
13827.Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΟΕ και ΟΖ τέμνονται από την ευθεία x΄x στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν είναι $E B \Gamma = 110^\circ$ και $O \Gamma B = 70^\circ$ τότε:



α) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι $O B \Gamma = 70^\circ$. (Μονάδες 8)
β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΟΒΓ ως προς τις πλευρές του. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΟΓ του τριγώνου ΟΒΓ. (Μονάδες 9)

4^{o} Θέμα

12360. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) προεκτείνουμε την ΒΓ προς το μέρος του Β και προς το μέρος του Γ κατά ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα.



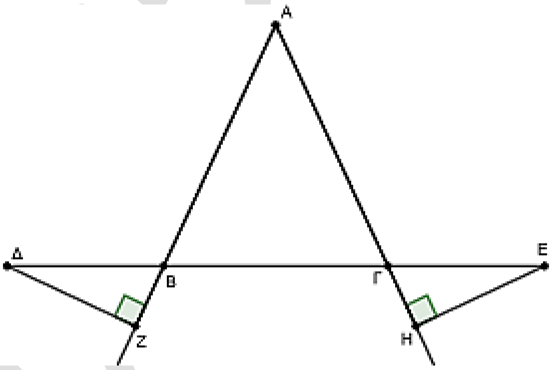
α) Αν $\hat{B}_{εξωτ} = 130^{\circ}$, τότε:

i. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

ii. Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΑΕ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων Β και Γ από τις ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, είναι ίσες. (Μονάδες 7)

12458. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημεία Δ και Ε στις προεκτάσεις της ΒΓ προς το Β και το Γ, τέτοια ώστε ΒΔ=ΓΕ. Έστω ότι ΔΗ ⊥ ΑΒ και ΕΘ ⊥ ΑΓ.



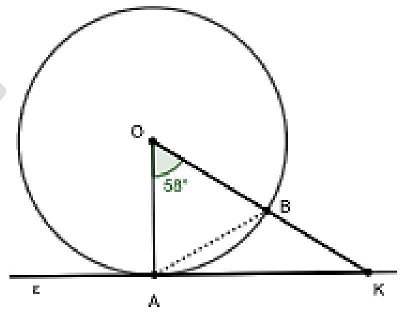
α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΒΖ=ΓΗ (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο ΑΗΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{A} = 50^{\circ}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΗΖ. (Μονάδες 8)

12466. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Η ευθεία ε είναι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Α, και η προέκτασή της ακτίνας ΟΒ τέμνει την ευθεία ε στο Κ.



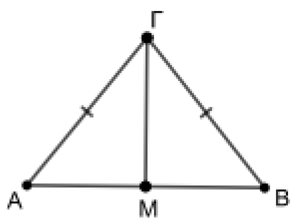
α) Αν η γωνία $\hat{O}$ είναι 58° :

i. Να υπολογίσετε τη γωνία $O\hat{B}A$. (Μονάδες 9)

ii. Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΚ. (Μονάδες 10)

β) Πόσες μοίρες έπρεπε να είχαμε σχεδιάσει τη γωνία $\hat{O}$ ώστε η χορδή ΑΒ να είναι ίση με την ακτίνα ρ; (Μονάδες 6)

12660. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΑΓ = ΒΓ, η ΓΜ είναι διάμεσος της ΑΒ, το ΒΜ = 3 και η γωνία $A\hat{Γ}M$ είναι ίση με 33° .

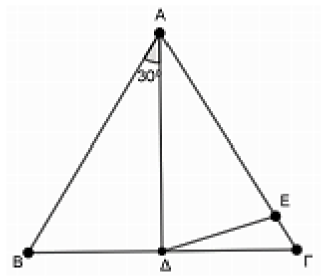


α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

γ) Αν δεν σας δίνεται ότι $A\hat{Γ}M = 33^{\circ}$ αλλά, αντί για αυτό, έχετε ότι ΑΓ = 6, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

12697. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια, ώστε $B\hat{A}Δ = 30^{\circ}$.
Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο, ώστε ΑΔ = ΑΕ.

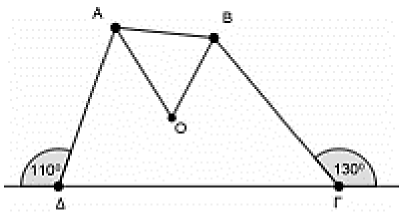


α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΑΓ. (Μονάδες 9)

β) Να αιτιολογήσετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ. (Μονάδες 7)

12700. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ η εξωτερική γωνία της Γ ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110°. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο, τότε να υπολογίσετε:

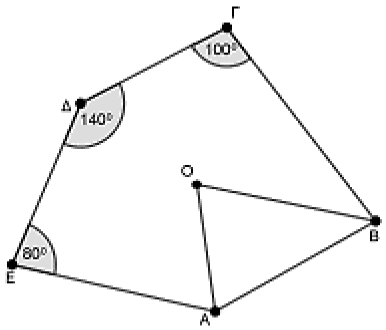


α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου. (Μονάδες 9)

β) το μέτρο του αθροίσματος $\mathrm{A}+\mathrm{B}$. (Μονάδες 9)

γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 7)

12701. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο.
Αν η γωνία του Γ ισούται με 100°, η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του Ε ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

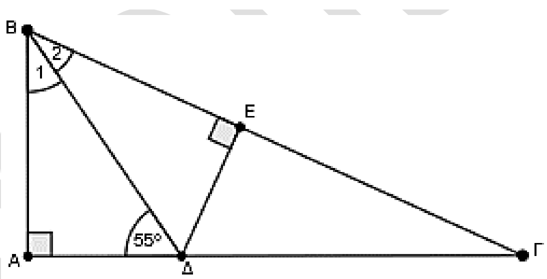


α) σε μοίρες, το μέτρο του αθροίσματος $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta+\mathrm{E}$. (Μονάδες 9)

β) σε μοίρες, το μέτρο του αθροίσματος $\mathrm{A}+\mathrm{B}$. (Μονάδες 9)

γ) σε μοίρες, το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 7)

12838. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{A}=90^\circ\right)$.



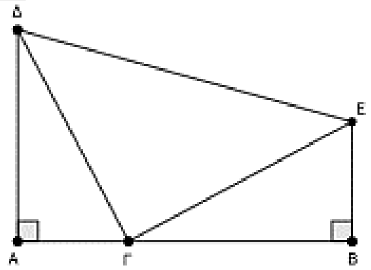
Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ, ώστε η γωνία ΑΔΒ να ισούται με 55^0. Από το Δ φέρνουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία B_1. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΒΕ. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 7)

12839. Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες Α,Β είναι ορθές και επιπλέον ΑΔ = ΒΓ και ΑΓ = ΒΕ.



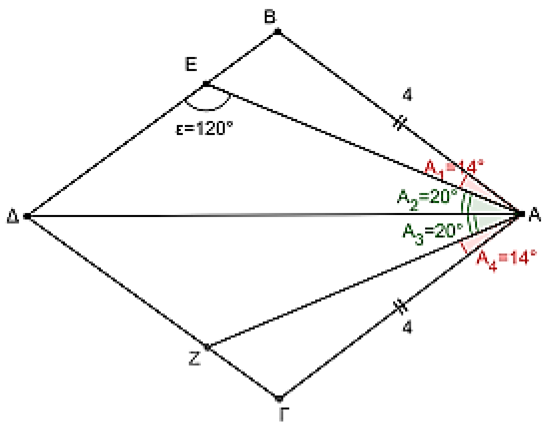
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Αν $\mathrm{E}\Gamma\mathrm{B}=40^\circ$ τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 7)

12969. Στο παρακάτω σχήμα είναι

$\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_4=14^\circ$, $\mathrm{A}_2=\mathrm{A}_3=20^\circ$ και ΑΒ=ΑΓ=4.



α) Να αποδείξετε ότι:

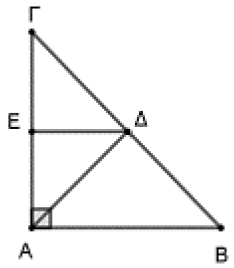
i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii. Οι γωνίες ΒΔΑ και ΓΔΑ είναι ίσες. (Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ=ΔΖ. (Μονάδες 8)

γ) Αν για τη γωνία $\hat{\varepsilon}$ ισχύει ότι $\hat{\varepsilon}=120^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία B. (Μονάδες 5)

12971. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$ και ΑΒ=ΑΓ) και ΑΔ η διάμεσός του. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.



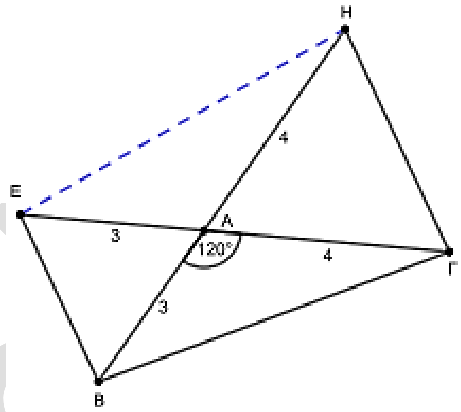
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) ΔΕ=ΕΓ. (Μονάδες 10)

γ) Το σημείο Ε είναι μέσο της πλευράς ΑΓ. (Μονάδες 8)

12973. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=120^\circ$, ΑΒ = 3 και ΑΓ = 4. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το μέρος του Α, κατά τμήμα ΑΗ = 4 και την πλευρά ΓΑ προς το μέρος του Α, κατά τμήμα ΑΕ = 3, όπως στο παρακάτω σχήμα.

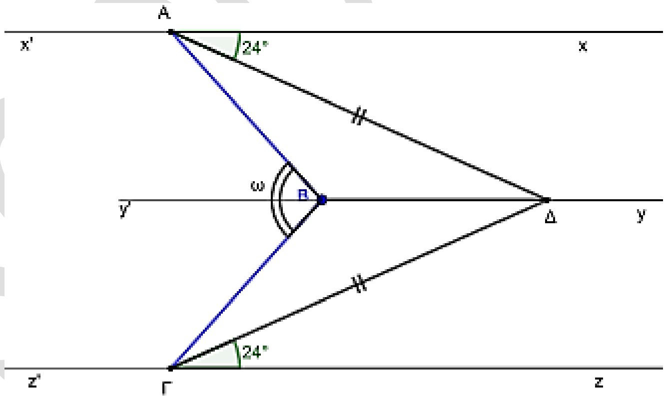


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΗ και ΑΒΕ είναι ισόπλευρα. (Μονάδες 10)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ίσο με το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) Το τμήμα ΒΕ είναι παράλληλο στο τμήμα ΓΗ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

12975. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες x΄x, y΄y και z΄z είναι παράλληλες. Για τις γωνίες $x\hat{A}\Delta$ και $z\hat{\Gamma}\Delta$ ισχύει ότι $x\hat{A}\Delta = z\hat{\Gamma}\Delta = 24^\circ$. Τα τμήματα ΑΔ και ΓΔ είναι ίσα.



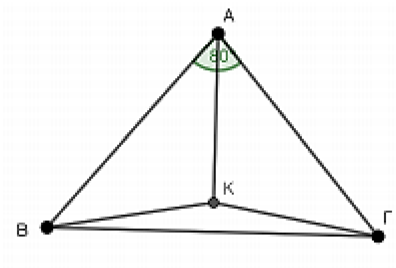
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ είναι ισοσκελή με βάσεις ΑΔ και ΓΔ αντίστοιχα, να υπολογίσετε:

i. Τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΔ και ΓΒΔ. (Μονάδες 10)

ii. Τη γωνία $\hat{\omega}$. (Μονάδες 7)

13002. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος έχουμε ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A}=80^\circ$. Το σημείο Κ είναι πάνω στη διχοτόμο της γωνίας Α και τέτοιο ώστε ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ.

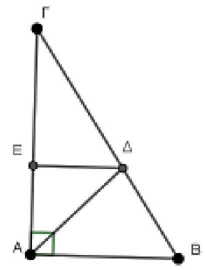


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{B}K$ και $A\hat{\Gamma}K$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{K}\Gamma$.

13285. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

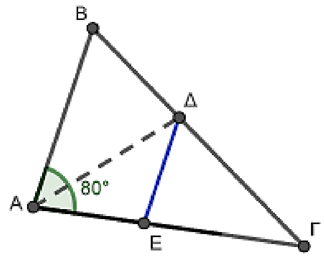


α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την $A\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 8)

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20º μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 9)

13286. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $A = 80^\circ$ και $B = 20^\circ + \Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας A.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου. (Μονάδες 9)

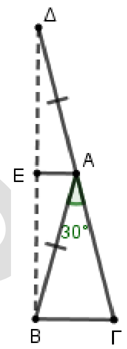
β) Αν η παράλληλη στην ΑΒ από το σημείο Δ τέμνει την ΑΓ στο Ε, τότε:

i. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 16)

13289. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $A = 30^\circ$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Προεκτείνουμε την ΓΑ προς το μέρος του Α και παίρνουμε τμήμα ΑΔ = ΑΒ. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας συμπληρωμένη την πρόταση που ακολουθεί και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

«Στο τρίγωνο ΓΒΔ το τμήμα ΒΑ είναι …………….. που αντιστοιχεί στην πλευρά ΔΓ».

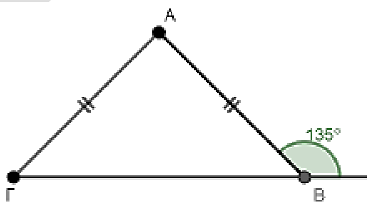
(Μονάδες 4)

γ) Αν το τμήμα ΑΕ είναι παράλληλο προς την πλευρά ΒΓ και τέμνει τη ΔΒ στο Ε, τότε:

i. Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες BAE και $E A \Delta$. (Μονάδες 8)

ii. Να δικαιολογήσετε γιατί το ΑΕ είναι κάθετο στο τμήμα ΔΒ. (Μονάδες 5)

13290. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $B_{εξ} = 135^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα .



α) Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

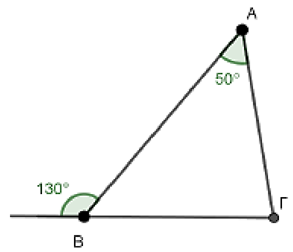
β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ και να χαρακτηρίσετε το είδος του τριγώνου ΑΔΓ:

i. Ως προς τις γωνίες του.

ii. Ως προς τις πλευρές του. (Μονάδες 10)

13291. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $B_{εξ} = 130^\circ$ και $A = 50^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

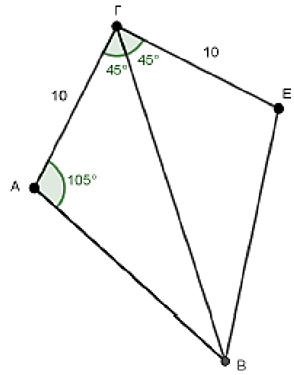
β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές και να γράψετε ποια είναι η βάση του. (Μονάδες 5)

γ) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και το τμήμα ΜΔ είναι παράλληλο στη ΒΓ, τότε :

i. Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΓΜΔ. (Μονάδες 9)

ii. Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΓΜΔ ως προς τις πλευρές του; (Μονάδες 3)

13292. Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα ΓΑ και ΓΕ είναι ίσα με 10 και η γωνία Α είναι ίση με 105°. Επιπλέον δίνεται ότι $A\Gamma B = B\Gamma E = 45^\circ$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΕΓΒ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

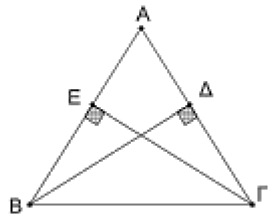
β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ABE.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΕ.

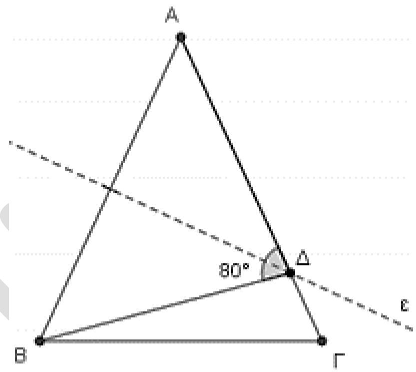
(Μονάδες 9)

13440. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.



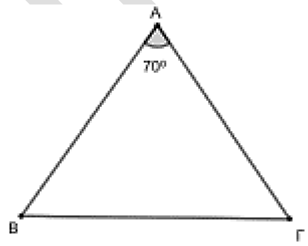
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Να δικαιολογήσετε γιατί ΒΔ = ΓΕ. (Μονάδες 8)
γ) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ του τριγώνου είναι και διάμεσοι, να αποδείξετε ότι $A = 60^\circ$. (Μονάδες 5)

13447. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η μεσοκάθετος (ε) της πλευράς του ΑΒ τέμνει την πλευρά του ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Δ. Αν η γωνία $Α\Delta Β$ είναι ίση με 80°, τότε να αποδείξετε ότι:



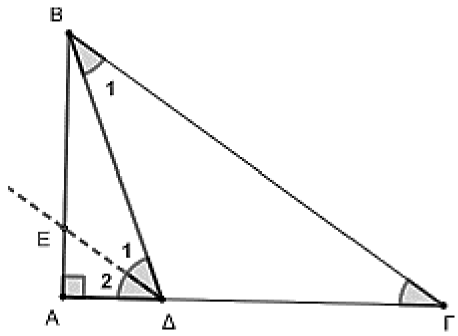
α) i. Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές με ΔΑ = ΔΒ. (Μονάδες 8)
ii. $A = 50^\circ$. (Μονάδες 8)
β) Αν είναι $\Delta B\Gamma = 15^\circ$, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

13448. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με γωνία κορυφής $A = 70^\circ$.



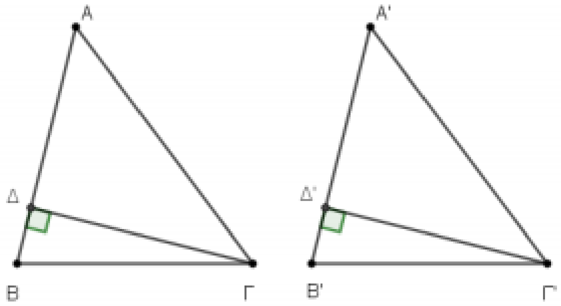
α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι άλλες δυο γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες με 55°. Είναι ο ισχυρισμός του σωστός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
β) Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
i. Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές με $AEZ = AZE = 55^\circ$. (Μονάδες 10)
ii. Η πλευρά ΕΖ του τριγώνου ΑΕΖ είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

13449. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ ($A = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του ΑΔΒ η οποία τέμνει την ΑΒ σε σημείο Ε. Στην προέκταση της ΑΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε ΔΓ = ΔΒ.



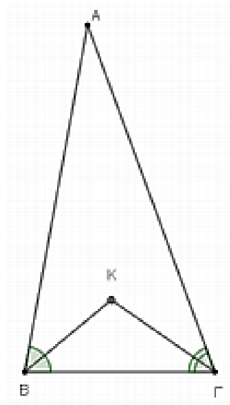
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $B_1 = \Gamma$. (Μονάδες 5)
ii. $\Delta_1 = \Gamma$. . (Μονάδες 7)
iii. Η διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ είναι παράλληλη στο τμήμα ΒΓ. (Μονάδες 6)
β) Αν $A\Delta B = 70^\circ$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)

13501. Δίνονται τα οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με ίσα ύψη ΓΔ = Γ΄Δ΄ και Β = Β΄.



α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = Β΄Γ΄. (Μονάδες 10)
β) Αν επιπλέον Α = Α΄, να αποδείξετε:
i. Γ = Γ΄. (Μονάδες 05)
ii. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα. (Μονάδες 05)
γ) Αν επιπλέον στο τρίγωνο ΑΒΓ το ίχνος Δ του ύψους του ΓΔ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

13504. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών $Β$ και $Γ$ τέμνονται στο Κ.



α) Αν $Β = 80^\circ$ και $Γ = 70^\circ$.

i. Να αποδείξετε ότι $Α = 30^\circ$.

(Μονάδες 07)

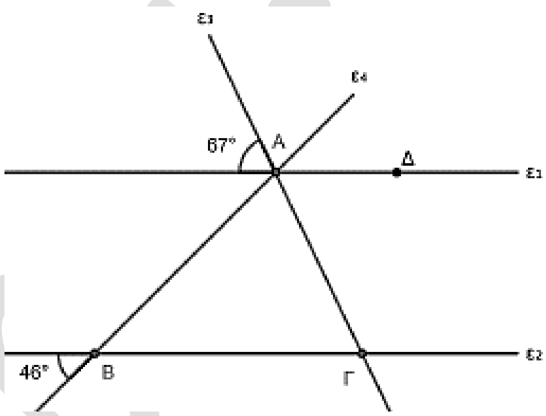
ii. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΒΚΓ.

(Μονάδες 10)

β) Αν το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές (ΒΚ = ΓΚ), τι τρίγωνο θα ήταν το ΑΒΓ, ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)

13652. Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ οι οποίες τέμνονται από τις ευθείες $ε_3$ και $ε_4$ στα σημεία Α, Β και Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

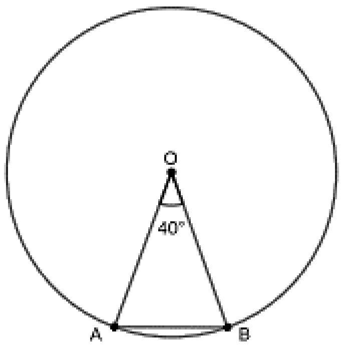
β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) i. Να υπολογίσετε τη γωνία $ΓΑΔ$.

ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΒΑΔ$». Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

13674. Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε σημεία Α και Β ώστε $ΑΟΒ = 40^\circ$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $Α$ και $Β$ του τριγώνου ΟΑΒ.

(Μονάδες 10)

β) Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΓ = ΟΑ και ΒΔ = ΟΒ.

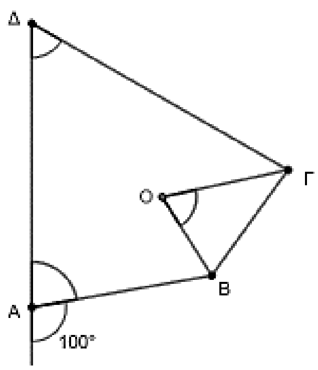
i. Να υπολογίσετε τις γωνίες $ΟΓΔ$ και $ΟΔΓ$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΓΔ. (Μονάδες 4)

γ) Αν προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΓ = 2ΟΑ και ΒΔ = 2ΟΒ, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ΑΒ//ΓΔ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

13675. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι $Α_{εξ} = 100^\circ$ και $Β + Γ = 220^\circ$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $Β$ και $Γ$ τέμνονται στο Ο, τότε:



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $Α$ και $Δ$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 10)

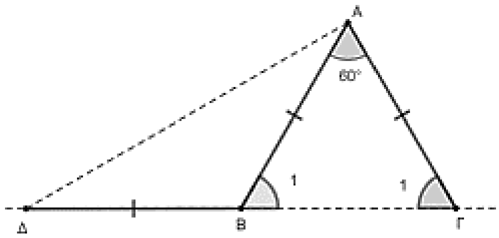
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $ΒΟΓ$ του τριγώνου ΒΟΓ. (Μονάδες 10)

γ) Πόσες μοίρες πρέπει να είναι καθεμιά από τις γωνίες $Β$ και $Γ$ έτσι ώστε ΑΔ//ΒΓ;

(Μονάδες 5)

13689. Στο παρακάτω σχήμα, τα σημεία Δ, Β και Γ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τα τμήματα ΒΔ, ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα και $B A \Gamma = 60^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $B_1 = \Gamma_1 = 60^\circ$ και $AB\Delta = 120^\circ$. (Μονάδες 9)
β) το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)
γ) το τμήμα ΑΒ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΔΑΓ. (Μονάδες 8)

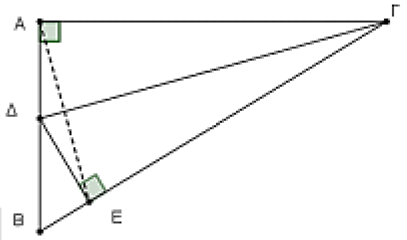


13691. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του Γ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Από το Δ φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ.

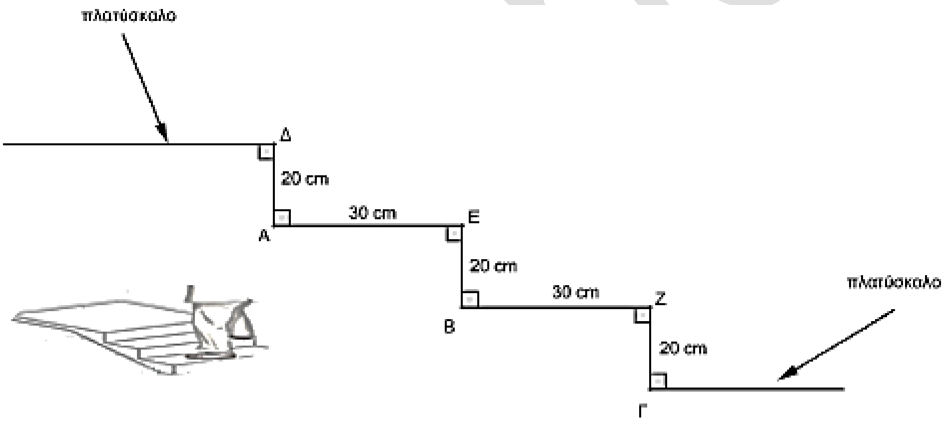
α) i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΕΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε τις ισότητες πλευρών και γωνιών που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΕΓΔ. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ. (Μονάδες 6)



13692. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστάνει την πλάγια όψη τμήματος σκάλας. Λαμβάνοντας υπόψη τις πληροφορίες του σχήματος, δηλαδή ΔΑ = ΕΒ = ΖΓ = 20 cm, ΑΕ = ΒΖ = 20 cm και οι γωνίες $\Delta = A = E = B = Z = \Gamma = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι:



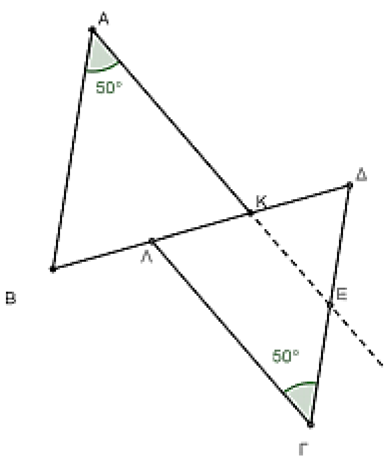
α) τα σημεία Α και Γ απέχουν το ίδιο από το σημείο Β. (Μονάδες 12)
β) τα σημεία Α, Β και Γ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 13)

13694. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ισοσκελή και ίσα με ΑΒ = ΓΔ = ΑΚ= ΓΛ και $A = \Gamma = 50^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ // ΓΔ. (Μονάδες 9)

β) Αν η προέκταση της ΑΚ (προς το Κ) τέμνει την ΓΔ σε σημείο Ε, να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΚΔΕ ως προς τις πλευρές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Τι θα αλλάζατε ή θα τροποποιούσατε στα δεδομένα ώστε το τρίγωνο ΚΔΕ να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

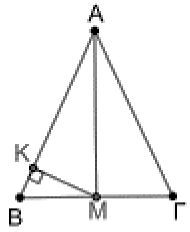


13792. Σε τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι: $\hat{A}_{εξ} = 130^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Έστω ΒΕ και ΓΖ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ αντίστοιχα που τέμνονται στο σημείο Ο. Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{O}Γ$. (Μονάδες 12)

13820. Θεωρούμε το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επίσης η ΜΚ είναι κάθετη στην ΑΒ.

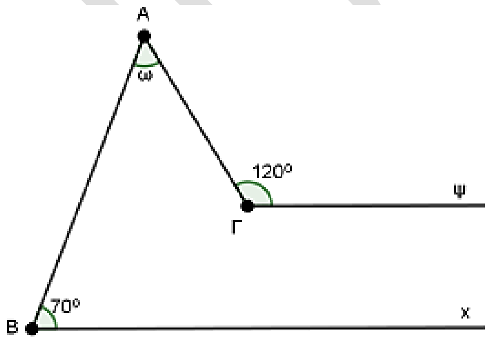


α) Να αιτιολογήσετε ότι η $\hat{B}$ είναι συμπληρωματική της $B\hat{M}K$. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΜ στην περίπτωση που $B\hat{M}K = 20^\circ$. (Μονάδες 12)

γ) Ποια γωνία του τριγώνου ΑΒΜ του σχήματος είναι ίση με τη γωνία $B\hat{M}K$; Να δικαιολογήσετε την απάντηση που δώσατε. (Μονάδες 6)

17334. Στο διπλανό σχήμα, οι ημιευθείες Βx και Γψ είναι παράλληλες. Επιπλέον η γωνία ΑΒx ισούται με 70^0 και η γωνία ΑΓψ ισούται με 120^0. Αν η προέκταση της Γψ προς το Γ, τέμνει την ΑΒ στο Δ και η προέκταση της ΑΓ προς το Γ τέμνει την Βx στο Ε να υπολογίσετε με πόσες μοίρες ισούται:



α) η γωνία ΓΕx. (Μονάδες 7)

β) η γωνία ω. (Μονάδες 10)

γ) η γωνία ΓΔΒ. (Μονάδες 8)

$3^{\text{ο}}$ Θέμα

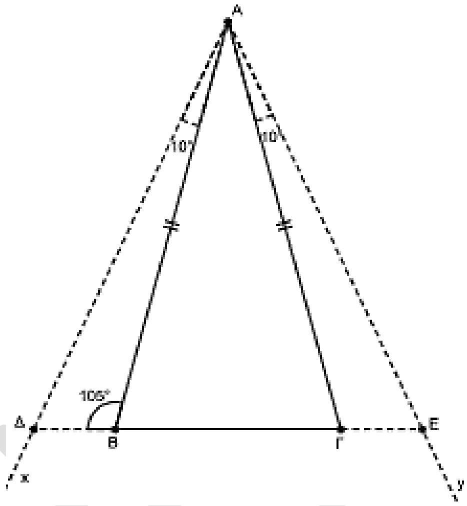
12457. Έστω το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $B_{\varepsilon\xi} = 105^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνιές Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

β) Φέρουμε τις ημιευθείες Αx και Βy τέτοιες ώστε $xAB = y A\Gamma = 10^\circ$, οι οποίες τέμνουν τις προεκτάσεις της ΒΓ, προς το Β και προς το Γ, στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, όπως στο σχήμα.

i. Να υπολογίσετε τις γωνιές $A\Delta B$ και $AE\Gamma$. (Μονάδες 9)

ii. Δικαιολογήστε γιατί το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

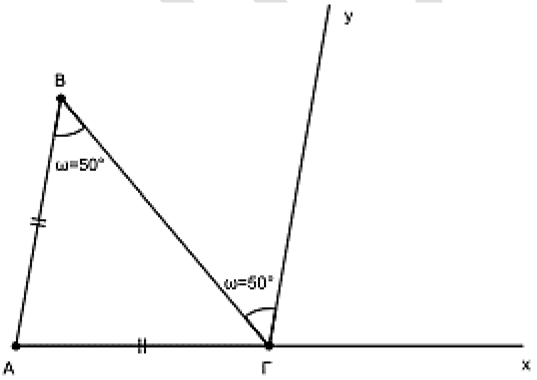


12467. Το τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ. Θεωρούμε ημιευθεία Γy εσωτερική της γωνίας $B\Gamma x$ τέτοια ώστε να σχηματίζει γωνία $\omega = 50^\circ$ με την πλευρά ΓΒ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $x\Gamma y$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η ημιευθεία Γy είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ. (Μονάδες 5)



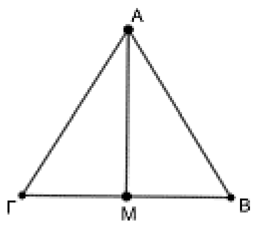
12659. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$ και η γωνία BAM είναι ίση με 32^0.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $BA\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε, σε μοίρες, το άθροισμα των γωνιών Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)

γ) Σε ποια ή ποιες από τις δύο παρακάτω περιπτώσεις i. και ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ;

i. Αν $B = 58^\circ$. **ii.** Αν $B = 64^\circ$. (Μονάδες 10)



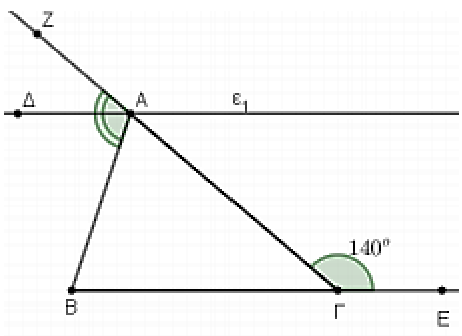
12702. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε_1 παράλληλη προς τη ΒΓ που διέρχεται από το Α. Αν $A\Gamma E = 140^\circ$ και $BAZ = 110^\circ$, τότε:

α) i. Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

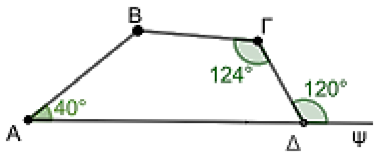
ii. Να υπολογίσετε τη γωνία Β του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

β) Να χαρακτηρίσετε το τρίγωνο ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του. (Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $BA\Delta$. (Μονάδες 7)



13819. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος δίνεται η εξωτερική γωνία $\Gamma\hat{\Delta}\psi = 120^\circ$ και οι γωνίες $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 124^\circ$.

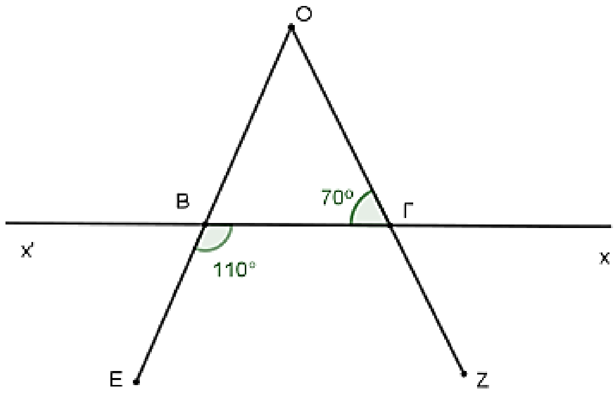


α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.
(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.
(Μονάδες 10)

γ) Είναι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ παράλληλα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 8)

13827. Στο διπλανό σχήμα, τα τμήματα ΟΕ και ΟΖ τέμνονται από την ευθεία x’x στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν είναι $E\hat{B}\Gamma = 110^\circ$ και $O\hat{\Gamma}B = 70^\circ$ τότε:



α) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι $O\hat{B}\Gamma = 70^\circ$.
(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΟΒΓ ως προς τις πλευρές του. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{O}\Gamma$ του τριγώνου ΟΒΓ. (Μονάδες 9)

Το 1ο Θέμα της Τράπεζας

12358. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών του γωνιών.

ii. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους παραπληρωματικές.

iii. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις οξείες γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

iv. Κάθε ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

v. Κάθε σημείο της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. (Μονάδες 15)

12453. α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.

ii. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

iii. Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

iv. Κάθε γωνία ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι $60°$.

v. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία τότε σχηματίζουν εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ενός ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος. (Μονάδες 15)

12455.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Οι γωνίες ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

iii. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

iv. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.

v. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 2ν-4 ορθές. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες. (Μονάδες 15)

12461.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μια γωνία του είναι οξεία.

ii. Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες.

iii. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες.

iv. Δύο τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.

v. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των 180^{o}. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος. (Μονάδες 15)

12462.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

ii. Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο και οι τρείς γωνιές του είναι αμβλείες.

iii. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο καθεμία από τις τρείς γωνιές του είναι ίση με 60^o .

iv. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνιές ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

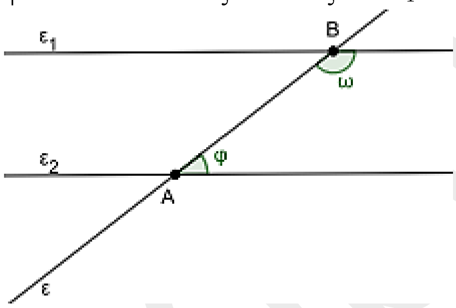
v. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία, τότε σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος. (Μονάδες 15)

12646. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

ii. Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες φ και ω είναι εντός εναλλάξ των $ε_1$ και $ε_2$ που τέμνονται από την ε.

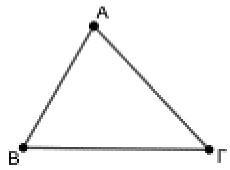


iii. Στο ίδιο επίπεδο έχουμε μια ευθεία ε και έναν κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Ονομάζουμε δ την απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ε. Αν ισχύει $δ > ρ$, τότε η ε έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.

iv. Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετη στην ευθεία.

v. Ένα τρίγωνο ονομάζεται αμβλυγώνιο αν έχει μόνο αμβλείες γωνίες. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180^o .
(Να χρησιμοποιήσετε το παρακάτω σχήμα και να αποδείξετε ότι:
$A+B+\Gamma=180^\circ$). (Μονάδες 15)



13435.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται σκαληνό, ισοσκελές ή ισόπλευρο.

ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

iii. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

iv. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι κάθετες.

v. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180 ορθές. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους. (Μονάδες 15)

13781.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

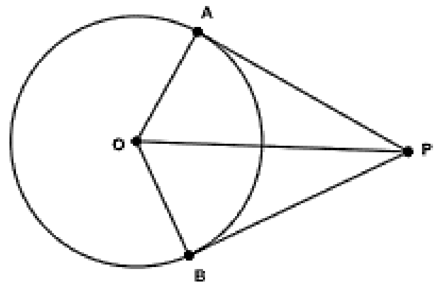
ii. Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

iii. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι σκαληνό.

iv. Δύο οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες είναι παραπληρωματικές.

v. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ κύκλου, που άγονται από σημείο Ρ εκτός αυτού είναι μεταξύ τους ίσα.



(Μονάδες 15)

13830.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Ένα τρίγωνο λέγεται ορθογώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του ορθές.

ii. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

iii. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

iv. Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

v. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου. (Μονάδες 15)