Χρήσιμες προτάσεις

Επιμέλεια: Ζανταρίδης Νίκος

ΘΕΜΑ 1

Αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη στο Α, τότε η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη στο $f(A)$ με ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Απόδειξη

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της Α, έπεται ότι η f είναι συνάρτηση 1-1, οπότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(A)$.

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, θα δείξουμε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Υποθέτουμε ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$, τότε θα υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ και $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. 'Έχουμε όμως

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \overset{f:\nearrow A}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) \overset{(*)}{\Rightarrow} y_1 \geq y_2 \text{ **άτοπο** αφού } y_1 < y_2.$$

(*)(αφού $f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \textit{ για κάθε } y \in f(A)$)

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Α, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $f(A)$.

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι αν η f είναι γνησίως μονότονη στο Α, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη στο $f(A)$ με το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

ΘΕΜΑ 2

Αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο Α, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = x$.

Απόδειξη

Έστω x_0 μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$, τότε θα ισχύει $f(x_0) = f^{-1}(x_0) :(1)$.

Από της (1) προκύπτει ότι $x_0 \in A, x_0 \in f(A)$ και $f(x_0) \in A$ (αφού $f(x_0) = f^{-1}(x_0) \in A$).

Έχουμε $(1) \Rightarrow f\left(f(x_0)\right) = f\left(f^{-1}(x_0)\right) \Rightarrow f\left(f(x_0)\right) = x_0 :(2)$

Θα δείξουμε ότι $f(x_0) = x_0$

Έστω ότι $f(x_0) \neq x_0$, τότε θα είναι $f(x_0) > x_0$ ή $f(x_0) < x_0$.

Υποθέτουμε ότι $f(x_0) > x_0$, τότε θα έχουμε

$$f(x_0) > x_0 \underset{f(x_0),x_0\in A}{\overset{f:\nearrow A}{\Rightarrow}} f(f(x_0)) > f(x_0) \overset{(2)}{\Rightarrow} x_0 > f(x_0) \Rightarrow f(x_0) < x_0, \text{ ΑΤΟΠΟ,}$$

αφού υποθέσαμε ότι $f(x_0) > x_0$.

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $f(x_0) < x_0$. Επομένως είναι $f(x_0) = x_0$, οπότε ο αριθμός x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$. Άρα κάθε ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι και ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$.

<u>Αντιστρόφως</u>

Έστω x_0 μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$, τότε θα ισχύει $f(x_0) = x_0$: (3).

Από την (3) προκύπτει ότι $x_0 \in A \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_0 \in f(A)$ (αφού $x_0 = f(x_0) \in f(\text{A})$).

Από την (3) έχουμε

$$f(x_0) = x_0 \Rightarrow f^{-1}(f(x_0)) = f^{-1}(x_0) \Rightarrow x_0 = f^{-1}(x_0) \Rightarrow f^{-1}(x_0) = x_0 : (4)$$

Από (3) και (4) προκύπτει ότι $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$.

Άρα ο αριθμός x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$. Επομένως κάθε ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$ είναι και ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

Αν για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$ κοντά στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty$, τότε είναι και $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$.

<u>Απόδειξη</u>

Επειδή είναι $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty$ έπεται ότι ισχύει $g(x) > 0$ κοντά στο x_0. Ακόμα δόθηκε ότι ισχύει $f(x) \geq g(x)$ κοντά στο x_0. Έτσι κοντά στο x_0 ισχύει

$f(x) \geq g(x) > 0$, οπότε κοντά στο x_0 ισχύει: $0 < \dfrac{1}{f(x)} \leq \dfrac{1}{g(x)}$: (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to x_o} 0 = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{1}{g(x)} = 0$ (αφού $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty$) οπότε, λόγω της (1), προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Επειδή είναι $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}=0$ και ισχύει $\frac{1}{f(x)}>0$ κοντά στο x_0, έπεται ότι

$\lim\limits_{x\to x_o}\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}=+\infty$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty$.

Σημείωση: Αν ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=-\infty$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=-\infty$.

ΘΕΜΑ 4

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος Δ και ισχύει $f'(x)\ge 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι αύξουσα στο Δ.

Απόδειξη

Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και είναι $[x_1,x_2]\subseteq\Delta$, έπεται ότι η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2), οπότε η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[x_1,x_2]$, άρα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1):(1)$$

Είναι όμως $f'(\xi)\ge 0$ και $x_2-x_1>0$ (αφού $x_1<x_2$), οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} f'(\xi)\ge 0 \\ x_2-x_1>0\end{cases}\Rightarrow f'(\xi)\cdot(x_2-x_1)\ge 0\overset{(1)}{\Rightarrow} f(x_2)-f(x_1)\ge 0\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$$

Επομένως για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)\le f(x_2)$, οπότε η f είναι αύξουσα στο Δ.

***Σημείωση**: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)\le 0$, τότε η f είναι φθίνουσα στο διάστημα Δ.*

ΘΕΜΑ 5

α) Αν η συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιττή, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt=0$.

β) Να βρεθεί το $\int_{-2014}^{2014}\left(e^{\eta\mu t}+e^{-\eta\mu t}\right)\cdot\left(t^3+t\right)dt$.

Λύση

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt,\ x\in[-\alpha,\alpha]$.

Είναι $g(x)=\int_{-x}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x} f(t)dt-\int_{0}^{-x} f(t)dt$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$, η συνάρτηση $h(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt,\ x\in[-\alpha,\alpha]$ είναι παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$ με $h'(x)=f(x)$ και η συνάρτηση

$\varphi(x)=\int_{0}^{-x} f(t)dt=h(-x),\ x\in[-a,a]$ είναι παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=f(-x)\cdot(-x)'=-f(-x)$.

Έτσι η g είναι παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=\left(\int_{0}^{x} f(t)dt-\int_{0}^{-x} f(t)dt\right)'=...=f(x)-f(-x)\cdot(-x)'=f(x)+f(-x).$$

Επειδή η f είναι περιττή έπεται ότι ισχύει $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$.

Έτσι για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ είναι $g'(x)=f(x)+(-f(x))=0$, οπότε η g είναι σταθερή στο $[-\alpha,\alpha]$.

Επομένως για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ ισχύει

$$g(x)=g(0)\Leftrightarrow\int_{-x}^{x} f(t)dt=\int_{-0}^{0} f(t)dt\Leftrightarrow\int_{-x}^{x} f(t)dt=0$$

Για x = α έχουμε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt=0$.

Σημείωση: *Ένας 2ος τρόπος επίλυσης είναι με αλλαγή μεταβλητής ($u=-t$).*

β) Για την συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\varphi(x)=\left(e^{\eta\mu x}+e^{-\eta\mu x}\right)\left(x^3+x\right)$, ισχύει

Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$\varphi(-x)=\left(e^{\eta\mu(-x)}+e^{-\eta\mu(-x)}\right)\left((-x)^3+(-x)\right)$$

$$=\left(e^{-\eta\mu x}+e^{\eta\mu x}\right)\left(-x^3-x\right)$$

$$=-\left(e^{\eta\mu x}+e^{-\eta\mu x}\right)\left(x^3+x\right)$$

$$=-\varphi(x),\ \textit{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

Άρα η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιττή, οπότε από το (α) ερώτημα έχουμε

$$\int_{-2014}^{2014} \varphi(t)dt = 0 \text{ δηλαδή } \int_{-2014}^{2014} \left(e^{\eta\mu t} + e^{-\eta\mu t}\right)\left(t^3 + t\right)dt = 0.$$

ΘΕΜΑ 6

Αν η συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 2\int_{0}^{\alpha} f(t)dt$.

Απόδειξη

Επειδή η f είναι άρτια ισχύει $f(-x) = f(x),\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in [-\alpha,\alpha]$: (1)

Θεωρώ την συνάρτηση $\varphi(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt - 2\int_{0}^{x} f(t)dt,\ x \in [-\alpha,\alpha]$

Είναι:

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt - 2\int_{0}^{x} f(t)dt$$

$$= \int_{-x}^{0} f(t)dt - \int_{0}^{x} f(t)dt$$

$$= -\int_{0}^{-\chi} f(t)dt - \int_{0}^{x} f(t)dt$$

Έχουμε,

$$\varphi'(x) = ... = -f(-x)\cdot(-x)' - f(x)$$

$$= -f(-x)\cdot(-1) - f(x)$$

$$= f(-x) - f(x)$$

$$\overset{(1)}{=} f(x) - f(x) = 0,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in [-a,a]$$

Άρα η φ είναι σταθερή στο $[-a,a]$, οπότε για κάθε $x \in [-a,a]$ ισχύει

$$\varphi(x) = \varphi(0) \Leftrightarrow \int_{-x}^{x} f(t)dt - 2\int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{-0}^{0} f(t)dt - 2\int_{0}^{0} f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{-x}^{x} f(t)dt - 2\int_{0}^{x} f(t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_{0}^{x} f(t)dt$$

Για $x=\alpha$ έχουμε: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 2\int_{0}^{\alpha} f(t)dt$.

Σημείωση: *2ος τρόπος* $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = \int_{-\alpha}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\alpha} f(t)dt$ *και για το* $\int_{-\alpha}^{0} f(t)dt$ *αλλαγή μεταβλητής* $(u=-t)$.

<u>ΘΕΜΑ 7</u>

Αν η συνάρτηση $f:\Delta \to \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα, είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = 0$ με $\alpha, \beta \in \Delta$, τότε είναι α = β.

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = \int_{\gamma}^{x} f(t)\, dt,\ \ x \in \Delta$ ($\gamma \in \Delta$, σταθερό σημείο του Δ).

Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ έπεται ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο Δ με

$$g'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ κα ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ έπεται ότι η f διατηρεί στο Δ σταθερό πρόσημο, οπότε θα είναι f(x) > 0 για κάθε $x \in \Delta$ ή f(x)<0 για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή θα είναι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ή $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Επομένως η g θα είναι γνησίως αύξουσα στο Δ ή γνησίως φθίνουσα στο Δ. Έτσι η g, ως γνησίως μονότονη στο Δ, είναι συνάρτηση 1 – 1.

Έχουμε,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\gamma} f(t)dt + \int_{\gamma}^{\beta} f(t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow -\int_{\gamma}^{\alpha} f(t)dt + \int_{\gamma}^{\beta} f(t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma}^{\beta} f(t)dt = \int_{\gamma}^{\alpha} f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow g(\beta) = g(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \beta = \alpha \qquad (\text{γιατί η } g \text{ είναι συνάρτηση } 1-1)$$

Άρα είναι α = β.

ΘΕΜΑ 8

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$

Απόδειξη

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x \in [\alpha, \beta]$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β] έπεται ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] με $g'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, οπότε η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο [α, β] (αφού η g είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β)).

Επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - \int_{\alpha}^{a} f(t)dt}{\beta - \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - 0 = (\beta - \alpha) f(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = (\beta - \alpha) f(\xi)$$

ΘΕΜΑ 9

Αν οι συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και ισχύει $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

Απόδειξη

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x),\ x \in [\alpha, \beta]$.

Η h είναι συνεχής στο [α ,β], ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Ακόμα για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0$.

Επειδή η h είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ έπεται ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x) - g(x)\right)dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

Βασικές ανισότητες

1) $|\eta\mu x| \le |x|,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν x = 0)

2) $e^x \ge x+1$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν x = 0)

3) $\ln x \le x-1,\ \gamma\iota\alpha\,\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\, x>0$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν x = 1)

4) $\alpha+\beta \ge 2\sqrt{\alpha\beta},\ \gamma\iota\alpha\,\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\,\alpha,\beta \ge 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν α = β)

5) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha} \ge 2,\ \gamma\iota\alpha\,\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\,\alpha>0$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν a = 1)

6) Αν $m \le f(x) \le M,\ \gamma\iota\alpha\,\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\, x\in\Delta$ τότε

$$\left(f(x)-m\right)\left(f(x)-M\right) \le 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow f^2(x)-(m+M)f(x)+m\cdot M \le 0\ \ldots$$

ΘΕΜΑ 10

Αν η συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ (Δ: διάστημα) είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f είναι συνάρτηση 1 – 1 .

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η f **ΔΕΝ** είναι συνάρτηση 1 – 1, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και $[x_1,x_2]\subseteq\Delta$ έπεται ότι η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη (x_1,x_2).

Ακόμη είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[x_1,x_2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ ώστε $f'(\xi)=0$, ΑΤΟΠΟ, αφού δόθηκε ότι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$.

Επομένως η f είναι συνάρτηση 1 – 1.

ΘΕΜΑ 11

Αν η συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ (Δ: διάστημα) είναι συνεχής και 1 – 1, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Απόδειξη

Έστω ότι η f **ΔΕΝ** είναι γνησίως μονότονη στο Δ, τότε δεδομένου ότι η f είναι συνάρτηση 1 -1, θα υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in\Delta$ με $x_1<x_2<x_3$ και

$$f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$$
$$\acute{\eta}$$
$$f(x_3)<f(x_1)<f(x_2)$$

$$ή$$
$$f(x_3) > f(x_1) > f(x_2)$$
$$ή$$
$$f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$$

Έστω $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και ισχύει $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ έπεται, λόγω του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών, ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $f(\xi) = f(x_3)$ και επειδή η f είναι 1 -1 προκύπτει ότι $\xi = x_3$, ΑΤΟΠΟ, αφού $x_1 < \xi < x_2 < x_3$.

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε και στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Επομένως η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

ΘΕΜΑ 12

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και εξίσωση f (x) = 0 έχει ν διαφορετικές ρίζες $(\nu \geq 2)$ στο Δ, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον (ν – 1) ρίζες στο Δ.

Απόδειξη

Έστω $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu \in \Delta$ με $\rho_1 < \rho_2 < ... < \rho_{\nu-1} < \rho_\nu$ οι ν στο πλήθος ρίζες της εξίσωσης f (x) = 0.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ έπεται ότι η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], ..., [\rho_{\nu-1}, \rho_\nu]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), ..., (\rho_{\nu-1}, \rho_\nu)$.

Ακόμη είναι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = ... = f(\rho_{\nu-1}) = f(\rho_\nu) = 0$, αφού οι αριθμοί $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης f (x) = 0.

Άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], ..., [\rho_{\nu-1}, \rho_\nu]$.

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2), \xi_2 \in (\rho_2, \rho_3), ..., \xi_{\nu-1} \in (\rho_{\nu-1}, \rho_\nu)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = 0,\ f'(\xi_2) = 0, ..., f'(\xi_{\nu-1}) = 0,$$

οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον (ν -1) ρίζες στο διάστημα Δ.

ΘΕΜΑ 13

Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύουν:

1. $|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\operatorname{Re}(\overline{z} \cdot w)$
2. $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$
3. $|z + w|^2 - |z - w|^2 = 4\operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 4\operatorname{Re}(\overline{z} \cdot w)$

Απόδειξη

1. Έχουμε,

$$|z+w|^2=(z+w)\overline{(z+w)}=(z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}=|z|^2+|w|^2+\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right) \text{οπότε}$$

$$|z+w|^2=|z|^2+|w|^2+\left(z\cdot\overline{w}+\overline{\left(z\cdot\overline{w}\right)}\right)=|z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right) \text{ και}$$

$$|z+w|^2=|z|^2+|w|^2+\left(\overline{z}\cdot w+\overline{\left(\overline{z}\cdot w\right)}\right)=|z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}\left(\overline{z}\cdot w\right)$$

2. Έχουμε,

$$|z+w|^2+|z-w|^2=(z+w)\overline{(z+w)}+(z-w)\overline{(z-w)}$$

$$=(z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)+(z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)$$

$$=z\cdot\overline{z}+\cancel{z\cdot\overline{w}}+\cancel{w\cdot\overline{z}}+w\cdot\overline{w}+z\cdot\overline{z}-\cancel{z\cdot\overline{w}}-\cancel{w\cdot\overline{z}}+w\cdot\overline{w}$$

$$=|z|^2+|w|^2+|z|^2+|w|^2$$

$$=2|z|^2+2|w|^2$$

3. Έχουμε,

$$|z+w|^2-|z-w|^2==(z+w)\overline{(z+w)}-(z-w)\overline{(z-w)}$$

$$=(z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)-(z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)$$

$$=\cancel{z\cdot\overline{z}}+z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{z}+\cancel{w\cdot\overline{w}}-\cancel{z\cdot\overline{z}}+z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{z}-\cancel{w\cdot\overline{w}}$$

$$=2\left(z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w\right)$$

$$=2\left(z\cdot\overline{w}+\overline{\left(z\cdot\overline{w}\right)}\right)$$

$$=2\cdot\left(2\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)\right)$$

$$=4\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)$$

Ακόμη είναι $\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=\operatorname{Re}\left(\overline{\overline{z}\cdot\overline{\overline{w}}}\right)=\operatorname{Re}\left(\overline{z}\cdot w\right)$.

Έτσι έχουμε

$$|z+w|^2-|z-w|^2=4\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=4\operatorname{Re}\left(\overline{z}\cdot w\right) \text{ .}$$