

Επιμέλεια: Περικλής Παντούλας

ΑΣΚΗΣΗ 1

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+3y) > f(x+2y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $y > 0$.

- 1) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- 2) Να λυθεί στο \mathbb{R} η εξίσωση $f(x) + f(3x-2) = f(2x-1) + f(1)$.

ΛΥΣΗ

1) Είναι $f(x+3y) > f(x+2y) : (1)$, ($x \in \mathbb{R}, y > 0$).

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Από την (1) θέτοντας όπου x το $3x_1 - 2x_2$ και όπου y το $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε ότι ισχύει :

$$\begin{aligned} f(3x_1 - 2x_2 + 3(x_2 - x_1)) &> f(3x_1 - 2x_2 + 2(x_2 - x_1)) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x_2) &> f(x_1) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

2) ... $f(x) + f(3x-2) = f(2x-1) + f(1) : (E)$.

Είναι φανερό ότι το $x_0 = 1$ είναι λύση της εξίσωσης (E), αφού :

$$f(1) + f(3 \cdot 1 - 2) = f(2 \cdot 1 - 1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) + f(1) = f(1) + f(1)$$

Για $x > 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 3x - 2 > 2x - 1 \end{cases} &\stackrel{\substack{f \text{ γν. αύξουσα} \\ \text{στο } \mathbb{R}}}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x) > f(1) \\ f(3x-2) > f(2x-1) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) + f(3x-2) &> f(2x-1) + f(1) \end{aligned}$$

Επομένως στο $(1, +\infty)$ η εξίσωση (E) δεν έχει λύση.

Για $x < 1$ έχουμε:

$$x < 1 \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 3x - 2 < 2x - 1 \end{cases} \xrightarrow{\substack{f \text{ γν. αύξουσα} \\ \text{στο } \mathbb{R}}} \begin{cases} f(x) < f(1) \\ f(3x - 2) < f(2x - 1) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) + f(3x - 2) < f(2x - 1) + f(1)$$

Επομένως στο $(-\infty, 1)$ η εξίσωση (E) δεν έχει λύση.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση (E) έχει ακριβώς μία λύση στο \mathbb{R} , η οποία είναι το $x_0 = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq 3f'(x) \leq 2 \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι σταθεροί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq 3f'(x) \leq 2 \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} : (2), (\alpha < \beta < \gamma)$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$, ώστε:

- $f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} : (2)$ και
- $f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} : (3)$

Έτσι η (1), λόγω των (2) και (3) γίνεται:

$$f'(\xi_1) \leq 3f'(x) \leq 2f'(\xi_2) : (4)$$

Από την (4) για $x = \xi_1$ έχουμε:

$$f'(\xi_1) \leq 3f'(\xi_1) \Rightarrow 2f'(\xi_1) \geq 0 \Rightarrow f'(\xi_1) \geq 0 : (5)$$

Από την (4) για $x = \xi_2$ έχουμε:

$$3f'(\xi_2) \leq 2f'(\xi_2) \Rightarrow f'(\xi_2) \leq 0 : (6)$$

Από τις (4), (5) και (6) προκύπτει ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} 0 \leq f'(\xi_1) \leq 3f'(x) \leq 2f'(\xi_2) \leq 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leq 3f'(x) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq 0 &\Rightarrow \boxed{f'(x) = 0} \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = 0$, οπότε η f είναι σταθερή στο \mathbb{R} .
(η σταθερή συνάρτηση ικανοποιεί την υπόθεση)

ΑΣΚΗΣΗ 3

Για τη συνεχή συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει :

$3f(x) = f(x^3) + f(x^{2011})$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $3f(x) = f(x^3) + f(x^{2011}) : (1)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ έπεται, λόγω του θεωρήματος μέγιστης και ελάχιστης τιμής, ότι η f παρουσιάζει στο $[-1, 1]$ ελάχιστο μ και μέγιστο M .

Αν $x_1 \in [-1, 1]$ είναι η θέση στην οποία η f παρουσιάζει το ελάχιστο και $x_2 \in [-1, 1]$ η θέση στην οποία η f παρουσιάζει το μέγιστο, τότε θα είναι $f(x_1) = \mu$ και $f(x_2) = M$.

Από την (1) για $x = x_1$, έχουμε:

$$3f(x_1) = f(x_1^3) + f(x_1^{2011}) \Rightarrow 3\mu = f(x_1^3) + f(x_1^{2011}) : (2)$$

Επειδή για $x_1 \in [-1, 1]$ έχουμε $x_1^3, x_1^{2011} \in [-1, 1]$, έπεται ότι $f(x_1^3) \geq \mu$ και

$$f(x_1^{2011}) \geq \mu, \text{ οπότε } f(x_1^3) + f(x_1^{2011}) \geq 2\mu \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 3\mu \geq 2\mu \Rightarrow \boxed{\mu \geq 0}.$$

Από την (1) για $x = x_2$, έχουμε:

$$3f(x_2) = f(x_2^3) + f(x_2^{2011}) \Rightarrow 3M = f(x_2^3) + f(x_2^{2011}) : (3)$$

Επειδή για $x_2 \in [-1, 1]$ έχουμε $x_2^3, x_2^{2011} \in [-1, 1]$, έπεται ότι $f(x_2^3) \leq M$

και $f(x_2^{2011}) \leq M$, οπότε $f(x_2^3) + f(x_2^{2011}) \leq 2M \stackrel{(3)}{\Rightarrow} 3M \leq 2M \Rightarrow \boxed{M \leq 0}$.

Έτσι για κάθε $x \in [-1, 1]$ ισχύει:

$$0 \leq \mu \leq f(x) \leq M \leq 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Άρα ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. (η $f(x) = 0$ ικανοποιεί την υπόθεση).

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο \mathbb{R} , να λυθούν στο \mathbb{R} οι εξισώσεις:

i. $f(x) + f(3x) = 2f(2x)$

ii. $xf'(x) + f(x) = f(2x)$

ΛΥΣΗ

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο \mathbb{R} , έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

i. Έχουμε $f(x) + f(3x) = 2f(2x) : (E_1)$.

Είναι φανερό ότι το $x_0 = 0$ είναι λύση της εξίσωσης (E_1) , αφού:

$$f(0) + f(3 \cdot 0) = 2f(2 \cdot 0).$$

Έστω $x > 0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x, 2x)$ και $\xi_2 \in (2x, 3x)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \frac{f(2x) - f(x)}{x} : (1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3x) - f(2x)}{3x - 2x} = \frac{f(3x) - f(2x)}{x} : (2)$$

Έχουμε όμως:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{x} < \xi_1 < 2\mathbf{x} < \xi_2 < 3\mathbf{x} \Rightarrow \xi_1 < \xi_2 \quad \overset{\substack{f' \text{ γν.αύξουσα} \\ \text{στο } \mathbb{R}}}{\Rightarrow} \quad f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \\
 & \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{f(2\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} < \frac{f(3\mathbf{x}) - f(2\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \\
 & \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \overset{\mathbf{x} > 0}{f(2\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})} < f(3\mathbf{x}) - f(2\mathbf{x}) \\
 & \Rightarrow f(\mathbf{x}) + f(3\mathbf{x}) > 2f(2\mathbf{x}).
 \end{aligned}$$

Έτσι για κάθε $\mathbf{x} \in (0, +\infty)$ ισχύει $f(\mathbf{x}) + f(3\mathbf{x}) > 2f(2\mathbf{x})$, οπότε η εξίσωση (E_1) δεν έχει λύση στο $(0, +\infty)$. Ομοίως εργαζόμενοι, αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση (E_1) δεν έχει λύση ούτε στο $(-\infty, 0)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση (E_1) έχει ακριβώς μία λύση στο \mathbb{R} , τον αριθμό $\mathbf{x}_0 = 0$.

ii. Έχουμε $\mathbf{x}f'(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) = f(2\mathbf{x}) : (E_2)$.

Είναι φανερό ότι το $\mathbf{x}_0 = 0$ είναι λύση της εξίσωσης (E_2) , αφού:

$$0 \cdot f'(0) + f(0) = f(2 \cdot 0).$$

Έστω $\mathbf{x} > 0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $[\mathbf{x}, 2\mathbf{x}]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (\mathbf{x}, 2\mathbf{x})$ ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(2\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{2\mathbf{x} - \mathbf{x}} \Leftrightarrow \mathbf{x}f'(\xi) = f(2\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) : (\alpha)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{x}f'(\mathbf{x}) - (f(2\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})) = \\
 & \stackrel{(\alpha)}{=} \mathbf{x}f'(\mathbf{x}) - \mathbf{x}f'(\xi) \\
 & = \mathbf{x}(f'(\mathbf{x}) - f'(\xi)) : (\beta)
 \end{aligned}$$

Έχουμε όμως:

$$\mathbf{x} < \xi < 2\mathbf{x} \quad \overset{\substack{f' \text{ γν.αύξουσα} \\ \text{στο } \mathbb{R}}}{\Rightarrow} \quad f'(\mathbf{x}) < f'(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) - f'(\xi) < 0$$

$$\stackrel{x > 0}{\Rightarrow} x(f'(x) - f'(\xi)) < 0$$

$$\stackrel{(\beta)}{\Rightarrow} xf'(x) - (f(2x) - f(x)) < 0$$

$$\Rightarrow xf'(x) + f(x) < f(2x)$$

Άρα η εξίσωση (E_2) δεν έχει λύση στο $(0, +\infty)$. Εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο, καταλήγουμε ότι η εξίσωση (E_2) δεν έχει λύση στο $(-\infty, 0)$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση (E_2) έχει ακριβώς μία λύση στο \mathbb{R} , τον αριθμό $x_0 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει :

$$f(f(x)) = f(-1)e^{f(x)+1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f'(x) > f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f .

ΛΥΣΗ

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) > f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow (f'(x) - f(x))e^{-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{-x} + f(x)(-e^{-x}) > 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{-x} + f(x)(-e^{-x})' > 0$$

$$\Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' > 0$$

$$\Leftrightarrow g'(x) > 0, \text{ όπου } g(x) = f(x)e^{-x}, x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , οπότε η g είναι συνάρτηση $1-1$.

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(-1)e^{1+f(x)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(f(x)) &= f(-1)e^1 e^{f(x)} \\ \Leftrightarrow f(f(x))e^{-f(x)} &= f(-1)e^{-(-1)} \\ \Leftrightarrow g(f(x)) &= g(-1) \\ \Leftrightarrow f(x) &= -1 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $f(x) = -1, x \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί τις συνθήκες που δόθηκαν στην άσκηση. Άρα είναι $f(x) = -1, x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$.

- 1) Να αποδείξετε ότι:

i.
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \alpha} + \frac{1}{x - \beta} + \frac{1}{x - \gamma}$$

ii.
$$\frac{\alpha}{f'(\alpha)} + \frac{\beta}{f'(\beta)} + \frac{\gamma}{f'(\gamma)} = 0$$

- 2) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0.$$

- 3) Να αποδείξετε ότι το ξ_1 είναι θέση τοπικού μεγίστου και το ξ_2 θέση τοπικού ελαχίστου της f .

- 4) Να αποδείξετε ότι:

i. το ξ_1 είναι πλησιέστερα στο α από ότι στο β .

ii. το ξ_2 είναι πλησιέστερα στο γ από ότι στο β .

ΛΥΣΗ

1) Είναι $f'(x) = (x - \beta)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \beta)$

1. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{(x-\beta)(x-\gamma) + (x-\alpha)(x-\gamma) + (x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \\ &= \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} + \frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} + \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} \\ &= \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} \end{aligned}$$

2. Είναι:

- $f'(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) + (\alpha - \alpha)(\alpha - \gamma) + (\alpha - \alpha)(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$
- $f'(\beta) = (\beta - \beta)(\beta - \gamma) + (\beta - \alpha)(\beta - \gamma) + (\beta - \alpha)(\beta - \beta) = -(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)$
- $f'(\gamma) = (\gamma - \beta)(\gamma - \gamma) + (\gamma - \alpha)(\gamma - \gamma) + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{f'(\alpha)} + \frac{\beta}{f'(\beta)} + \frac{\gamma}{f'(\gamma)} &= \frac{\alpha}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta}{-(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} = \\ &= \frac{\alpha(\beta - \gamma) - \beta(\alpha - \gamma) + \gamma(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} \\ &= \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma - \beta\gamma}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} \\ &= \frac{0}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} = 0 \end{aligned}$$

- 2) Είναι $f(\alpha) = (\alpha - \alpha)(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = 0$,
 $f(\beta) = (\beta - \alpha)(\beta - \beta)(\beta - \gamma) = 0$ και
 $f(\gamma) = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \gamma) = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

$f'(x) = (x - \beta)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \beta)$, οπότε η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα (α, β) και (β, γ) . Ακόμη είναι $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$, οπότε η f

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος **Rolle** σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$.

Επομένως υπάρχουν:

- $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και
- $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$ και

3) Είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - \beta)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \beta) = \\ &= 3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \end{aligned}$$

Από το ερώτημα (2) συμπεραίνουμε ότι οι ξ_1, ξ_2 είναι δύο διαφορετικές ρίζες του τριωνύμου $f'(x)$, οπότε το $f'(x)$ γράφεται :

$$f'(x) = 3(x - \xi_1)(x - \xi_2), \text{ όπου } \alpha < \xi_1 < \beta < \xi_2 < \gamma.$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	α	ξ_1	β	ξ_2	γ	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			T.M.		T.E.		

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο ξ_1 και τοπικό ελάχιστο στο ξ_2 .

4) • i) Έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\xi_1 - \beta)(\xi_1 - \gamma) + (\xi_1 - \alpha)(\xi_1 - \gamma) + (\xi_1 - \alpha)(\xi_1 - \beta) = 0 \\ &\Rightarrow (\xi_1 - \gamma)[(\xi_1 - \beta) + (\xi_1 - \alpha)] = -(\xi_1 - \alpha)(\xi_1 - \beta) \\ &\Rightarrow (\xi_1 - \gamma)(2\xi_1 - \alpha - \beta) = -(\xi_1 - \alpha)(\xi_1 - \beta) \\ &\Rightarrow 2\xi_1 - \alpha - \beta = -\frac{(\xi_1 - \alpha)(\xi_1 - \beta)}{\xi_1 - \gamma} : (1) \end{aligned}$$

Έχουμε όμως:

$$\alpha < \xi_1 < \beta < \xi_2 < \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1 - \alpha > 0 \\ \xi_1 - \beta < 0 \\ \xi_1 - \gamma < 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{(\xi_1 - \alpha)(\xi_1 - \beta)}{\xi_1 - \gamma} < 0$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2\xi_1 - \alpha - \beta < 0 \Rightarrow 2\xi_1 < \alpha + \beta \Rightarrow \xi_1 < \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Επειδή ισχύει $\xi_1 < \frac{\alpha + \beta}{2}$, έπεται ότι το ξ_1 βρίσκεται πλησιέστερα στο α από ότι στο β .

• ii) Ομοίως αποδεικνύεται ότι το ξ_2 είναι πλησιέστερα στο γ από ότι στο β .

ΑΣΚΗΣΗ 7

Για τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(2f(x)) + f(3f(x)) = 10x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Είναι $f(2f(x)) + f(3f(x)) = 10x$: (1).

Έστω $y_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίος. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = y_0$.

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x_0) = y_0$, τότε θα ισχύει $f(x) \neq y_0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή ισοδύναμα $f(x) - y_0 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $g(x) = f(x) - y_0$, $x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \neq 0$, οπότε η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} . Δηλαδή θα είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - y_0 > 0 \Leftrightarrow f(x) > y_0 \quad : (2)$$

Από την (2) θέτοντας, όπου x το $2f(x)$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(2f(x)) > y_0$ και θέτοντας, όπου x το $3f(x)$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(3f(x)) > y_0$. Έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(2f(x)) + f(2f(x)) > 2y_0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 10x > 2y_0 \Rightarrow x > \frac{y_0}{5}, \text{ ΑΤΟΠΟ.}$$

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x_0) = y_0$.

Έτσι αποδείξαμε ότι για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x_0) = y_0$, οπότε είναι $\mathbb{R} \subseteq f(\mathbb{R})$ και επειδή είναι και $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ προκύπτει ότι είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|f'(x)| \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι $f(a) = 0$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $|f'(x)| \leq |f(x)| : (1)$. Από την (1) έχουμε:

$$|f'(x)| \cdot |2f(x)| \leq |f(x)| \cdot |2f(x)|$$

$$\Rightarrow |2f(x)f'(x)| \leq |2f^2(x)|$$

$$\Rightarrow \left| (f^2(x))' \right| \leq 2f^2(x)$$

$$\Rightarrow -2f^2(x) \leq (f^2(x))' \leq 2f^2(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f^2(x))' + 2f^2(x) \geq 0 \\ (f^2(x))' - 2f^2(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left((f^2(x))' + 2f^2(x) \right) e^{2x} \geq 0 \\ \left((f^2(x))' - 2f^2(x) \right) e^{-2x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f^2(x)e^{2x})' \geq 0 \\ (f^2(x)e^{-2x})' \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g'(x) \geq 0 \\ h'(x) \leq 0 \end{cases} ,$$

όπου $g(x) = f^2(x)e^{2x}, x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = f^2(x)e^{-2x}, x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η g είναι αύξουσα στο \mathbb{R} και η h είναι φθίνουσα στο \mathbb{R} , οπότε:

- Για κάθε $x \leq \alpha$ ισχύει $g(x) \leq g(\alpha) \Leftrightarrow f^2(x)e^{2x} \leq f^2(\alpha)e^{2\alpha} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f^2(x)e^{2x} \leq 0^2 \cdot e^{2\alpha} \stackrel{e^{2x} > 0}{\Leftrightarrow} f^2(x) \leq 0 \stackrel{f^2(x) \geq 0}{\Leftrightarrow} f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Άρα για κάθε $x \leq \alpha$ ισχύει $f(x) = 0$.

- Για κάθε $x \geq \alpha$ ισχύει $h(x) \leq h(\alpha) \Leftrightarrow f^2(x)e^{-2x} \leq f^2(\alpha)e^{-2\alpha} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f^2(x)e^{-2x} \leq 0^2 \cdot e^{-2\alpha} \stackrel{e^{-2x} > 0}{\Leftrightarrow} f^2(x) \leq 0 \stackrel{f^2(x) \geq 0}{\Leftrightarrow} f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Άρα για κάθε $x \geq \alpha$ ισχύει $f(x) = 0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ όπου } a_0, a_1, a_2, \dots, a_v \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N}^*$$

(άρτιος) και $a_v > 0$, ισχύει $xf'(x) > vf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1) Να μελετηθεί η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^v}$ ως προς τη μονοτονία.

2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο \mathbb{R} .

ΛΥΣΗ

Έχουμε $xf'(x) > vf(x) : (1)$.

$$1) \text{ Είναι } g'(x) = \frac{f'(x)x^v - f(x)v x^{v-1}}{x^{2v}} = \frac{xf'(x) - vf(x)}{x^{v+1}}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $xf'(x) - vf(x) > 0 : (2)$ και επειδή ο $(v+1)$ είναι θετικός περιττός ακέραιος, έπεται ότι:

- για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{xf'(x) - vf(x)}{x^{v+1}} > 0$
- για κάθε $x < 0$ ισχύει $\frac{xf'(x) - vf(x)}{x^{v+1}} < 0$

Άρα είναι $g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $g'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

2) Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{x^v} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_v x^v}{x^v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_v = \alpha_v \end{aligned}$$

Ομοίως $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \alpha_v$.

Από την (1) για $x = 0$ έχουμε:

$$0 \cdot f'(0) > vf(0) \Rightarrow vf(0) < 0 \Rightarrow f(0) < 0$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^v} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^v} f(x) \right) \stackrel{\left(\begin{smallmatrix} (+\infty) \cdot f(0) \\ f(0) < 0 \end{smallmatrix} \right)}{=} -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x^v} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^v} f(x) \right) \stackrel{\left(\begin{smallmatrix} (+\infty) \cdot f(0) \\ f(0) < 0 \end{smallmatrix} \right)}{=} -\infty ,$$

αφού ο v είναι θετικός άρτιος.

Επειδή η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, έπεται ότι:

$$g((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, \alpha_v)$$

Επειδή η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ έπεται ότι:

$$g((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right) = (-\infty, \alpha_v)$$

Επειδή είναι $\alpha_v > 0$, συμπεραίνουμε ότι $0 \in g((-\infty, 0))$ και $0 \in g((0, +\infty))$

- ✓ Επειδή $0 \in g((-\infty, 0))$ και η g είναι γνησίως μονότονη στο $(-\infty, 0)$, έπεται ότι στο $(-\infty, 0)$ η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση, οπότε και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(-\infty, 0)$.
- ✓ Επειδή $0 \in g((0, +\infty))$ και η g είναι γνησίως μονότονη στο $(0, +\infty)$, έπεται ότι στο $(0, +\infty)$ η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση, οπότε και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, +\infty)$.

Ακόμη είναι $f(0) < 0$, οπότε το 0 δεν είναι λύση της εξίσωσης

$f(x) = 0$. Έτσι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο \mathbb{R} .