Master Class 3

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ο **Ν. ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**
παρουσιάζει

ποια είναι η συνάρτηση ?

21 Απριλίου 2013, 11:00 π.μ.
Ξενοδοχείο «Αιγές Μέλαθρον»

Γιάννης Απλακίδης

3η περίοδος 2012-2013

ΘΕΜΑ 1.

Για την συνάρτηση $f: IR \to IR$ ισχύει $\left(f(x)\right)^2 \cdot f(1-x) = e^{x+1}$ για κάθε $x \in IR$

1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x, x \in IR$
2. Να βρείτε την εφαπτόμενη (ε) της C_f που διέρχεται από το σημείο (-1,-e)
3. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την ευθεία (ε) , τον άξονα x΄x και την ευθεία x=α , όπου $\alpha \in \left(-\infty, 0\right)$ και να βρεθεί $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} E(\alpha)$

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $\left(f(x)\right)^2 \cdot f(1-x) = e^{x+1}$: (1)

Από την (1) θέτοντας όπου x το 1-x έχουμε ότι για κάθε $x \in IR$ ισχύει

$\left(f(1-x)\right)^2 \cdot f(x) = e^{2-x}$: (2)

Από την (1) έχουμε

$\left(f(x)\right)^2 \cdot f(1-x) = e^{x+1} \neq 0 \Rightarrow \left(f(x)\right)^2 \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$

Έτσι από την (1) προκύπτει ότι για κάθε $x \in IR$ ισχύει

$f(1-x) = \dfrac{e^{x+1}}{\left(f(x)\right)^2}$: (3) Από την (2), λόγω της (3) , έχουμε:

$$\left(\frac{e^{x+1}}{\left(f(x)\right)^2}\right)^2 \cdot f(x) = e^{2-x} \Leftrightarrow \frac{e^{2x+2}}{\left(f(x)\right)^3} = e^{2-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)\right)^3 = e^{3x} \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^3 = \left(e^x\right)^3 \Leftrightarrow f(x) = e^x$$

Είναι φανερό ότι η $f(x)=e^x$, $x \in IR$ ικανοποιεί την (1) Άρα είναι $f(x)=e^x$, $x \in IR$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

β) Είναι $f(x)=e^x$, $f'(x)=(e^x)'=e^x$, $f(x_o)=e^{x_o}$, $f'(x_o)=e^{x_o}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $M(x_o, f(x_o))$ είναι

$$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o) \Leftrightarrow y-e^{x_o}=e^{x_o}(x-x_o) \Leftrightarrow y=e^{x_o}\cdot x+e^{x_o}(1-x_o)$$

Για να διέρχεται η ευθεία (ε) από το σημείο (-1,-e) πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$-e=e^{x_o}\cdot(-1)+e^{x_o}(1-x_o) \Leftrightarrow -e=-e^{x_o}+e^{x_o}-x_oe^{x_o} \Leftrightarrow x_oe^{x_o}=e \Leftrightarrow x_o=e^{1-x_o}$$

$$\Leftrightarrow x_o-e^{1-x_o}=0 \Leftrightarrow g(x_o)=g(1), \text{ όπου } g(x)=x-e^{1-x}, x\in IR$$

Είναι $g'(x)=\left(x-e^{1-x}\right)'=1-e^{1-x}\cdot(1-x)'=1+e^{1-x}>0$, για κάθε $x\in IR$,

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο IR .

Άρα η g , ως γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της , είναι συνάρτηση 1-1 .

Έτσι από την $g(x_o)=g(1)$, δεδομένου ότι η g είναι συνάρτηση 1-1 , προκύπτει ότι είναι $x_o=1$

Για $x_o=1$ η εξίσωση της (ε) γίνεται y=ex. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη της C_f είναι η ευθεία (ε):y=ex και το σημείο της επαφής είναι το M(1,e)

γ) Είναι $f'(x)=e^x$ και $f''(x)=e^x>0$ για κάθε $x\in IR$, οπότε η f είναι κυρτή στο IR.Επειδή η f είναι κυρτή στο IR έπεται ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενη της ευθείας (ε):y=ex, με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής M(1,e).

Ακόμη η ευθεία (ε):y=ex τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο O(0,0).

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=E_1+E_2$,όπου E_1είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=α και x=0 και E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες x=0 και x=1

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Είναι

$$E_1 = \int_{\alpha}^{o} f(x)dx = \int_{\alpha}^{o} e^x dx = \left[e^x\right]_{\alpha}^{o} = 1 - e^{\alpha} \ \tau.\mu \ \text{και}$$

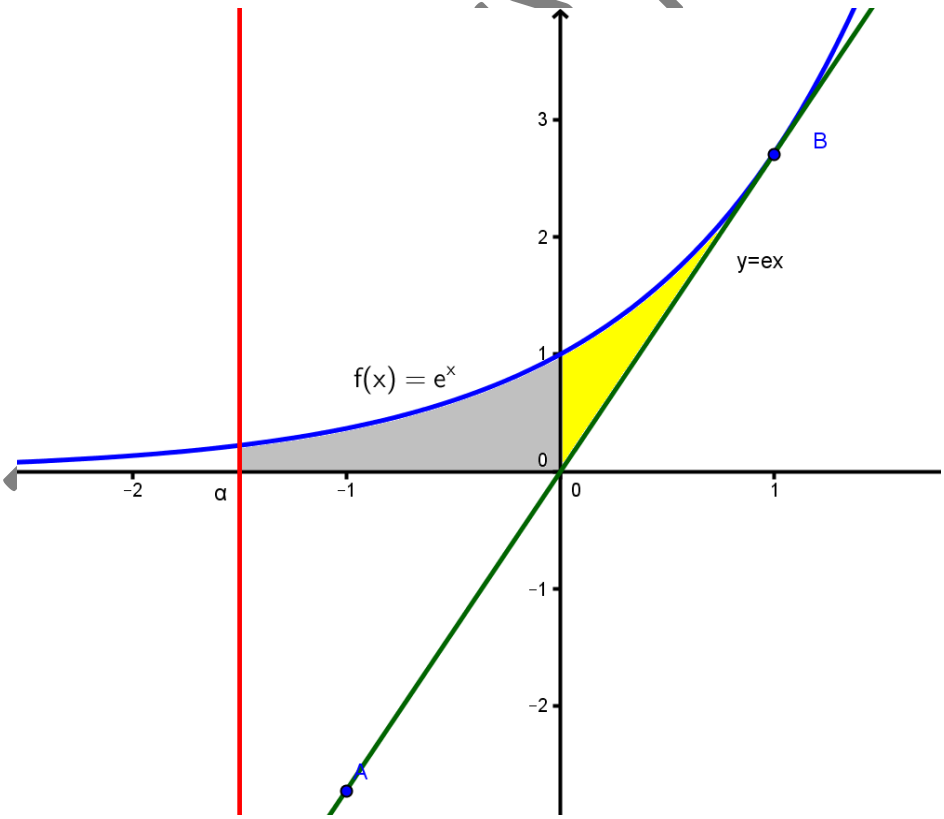
$$E_2 = \int_{o}^{1}\left(f(x) - ex\right)dx = \int_{o}^{1}\left(e^x - e\cdot x\right)dx = \int_{o}^{1} e^x dx - e\cdot\int_{o}^{1} x dx = \left[e^x\right]_{o}^{1} - \frac{e}{2}\left[x^2\right]_{o}^{1} =$$

$$= e - 1 - \frac{e}{2}(1-0) = \left(\frac{e}{2} - 1\right)\tau.\mu$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\alpha) = E_1 + E_2 = 1 - e^{\alpha} + \frac{e}{2} - 1 = \frac{e}{2} - e^{\alpha} \ \ \tau.\mu$$

Είναι $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} E(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left(\frac{e}{2} - e^{\alpha}\right) = \frac{e}{2} - 0 = \frac{e}{2} \ (\tau.\mu)$



ΘΕΜΑ 2.

Για την συνάρτηση $f : IR \to IR$ ισχύει

$\left|f(x) - f(y) - x^2 + y^2\right| \le \left(\eta\mu x - \eta\mu y\right)^2$ για κάθε $x, y \in R$ και $f(0) = 1$

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2, x\in IR$ είναι σταθερή στο IR και να βρεθεί ο τύπος της f.
2. Να βρείτε ποιο σημείο της C_f απέχει από το σημείο A(5,0) την μικρότερη απόσταση .
3. Αν M_o είναι το σημείο της C_f που απέχει από το A(5,0) την μικρότερη απόσταση .

   α) να δείξετε ότι η εφαπτόμενη (ε) της Cf στο M_o είναι κάθετη στην ευθεία AM_o .

   β) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x΄x , την ευθεία AM_o και την ευθεία x=0.

ΛΥΣΗ

1) Έστω $x_o\in IR$ τυχαίος. Λόγω της (1) έχουμε ότι για κάθε $x\neq x_o$

ισχύει :

$$\left|f(x) - f(x_o) - x^2 + x_o^2\right| \le \left(\eta\mu x - \eta\mu x_o\right)^2 \Leftrightarrow \left|\left(f(x) - x^2\right) - \left(f\left(x_o\right) - x_o^2\right)\right| \le \left(\eta\mu x - \eta\mu x_o\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left|g\left(x\right) - g\left(x_o\right)\right| \le \left(\eta\mu x - \eta\mu x_o\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\left|g\left(x\right) - g\left(x_o\right)\right|}{\left|x - x_o\right|} \le \frac{\left(\eta\mu x - \eta\mu x_o\right)^2}{\left|x - x_o\right|}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{g\left(x\right) - g\left(x_o\right)}{x - x_o}\right| \le \left|\frac{\left(\eta\mu x - \eta\mu x_o\right)^2}{x - x_o}\right|$$

$$\Leftrightarrow -\left|\frac{\left(\eta\mu x - \eta\mu x_o\right)^2}{x - x_o}\right| \le \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \le \left|\frac{\left(\eta\mu x - \eta\mu x_o\right)^2}{x - x_o}\right| : (2)$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Η συνάρτηση φ(x)=ημx είναι παραγωγίσιμη στο IR με φ΄(x)=(ημx)΄=συνx ,

οπότε είναι :

$$\lim_{x\to x_o}\left|\frac{(\eta\mu x-\eta\mu x_o)^2}{x-x_o}\right| = \left|\lim_{x\to x_o}\left[\left(\frac{\eta\mu x-\eta\mu x_o}{x-x_o}\right)^2\cdot(x-x_o)\right]\right|$$

$$=\left|\lim_{x\to x_o}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(x_o)}{x-x_o}\right)^2\cdot\lim_{x\to x_o}(x-x_o)\right| = \left|(\varphi'(x_o))\cdot 0\right| = |0| = 0$$

και $\lim_{x\to x_o}\left(-\left|\frac{(\eta\mu x-\eta\mu x_o)^2}{x-x_o}\right|\right) = -0 = 0$, οπότε λόγω της (2) προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} = 0$$

Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o\in IR$ και ισχύει $g'(x_o)=0$ για κάθε $x_o\in IR$.

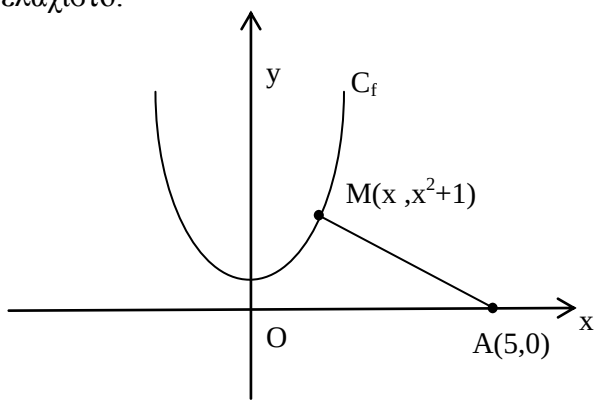
Άρα η g είναι σταθερή στο IR .Επειδή η g είναι σταθερή στο IR έχουμε ότι για κάθε $x\in IR$, ισχύει:

$g(x)=g(0)\Leftrightarrow f(x)-x^2=f(0)-0^2\Leftrightarrow f(x)-x^2=1\Leftrightarrow f(x)=x^2+1$ (ικανοποιεί την υπόθεση)

2) Έστω $M(x,x^2+1)$ σημείο της C_f.Είναι

$$(AM)=\sqrt{(x-5)^2+(x^2+1-0)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(x^2+1)^2}$$

Είναι φανερό ότι η απόσταση (AM) γίνεται ελάχιστη αν και μόνο αν το $(AM)^2$ γίνεται ελάχιστο.



ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Είναι $(AM)^2=(x-5)^2+(x^2+1)^2=x^4+3x^2-10x+26=h(x)$, $x\in R$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=4x^3+6x-10$.

Είναι $h''(x)=12x^2+6>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε η h΄ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Ακόμη είναι $h'(1)=4\cdot 1^3+6\cdot 1-10=0$. Έτσι έχουμε

$h'(x)>0 \Leftrightarrow h'(x)>h'(1) \Leftrightarrow x>1$, (αφού η h΄ είναι γνησίως αύξουσα στο R).

Όμοια $h'(x)<0 \Leftrightarrow h'(x)<h'(1) \Leftrightarrow x<1$,(αφού η h΄ είναι γν. αύξουσα στο R.)

$h'(x)=0 \Leftrightarrow h'(x)=h'(1) \Leftrightarrow x=1$, (αφού η h΄ ως γνησίως αύξουσα στο R είναι συνάρτηση “1-1”).

x	$-\infty$	1	$+\infty$
h΄(x)	-	0	+
h(x)	↘	min	↗

Από το πρόσημο της h΄(x) που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=1$, το οποίο είναι το

$h_{min}=h(1)=20$. Για x=1 είναι $y=f(1)=1^2+1=2$.

Επομένως το σημείο της C_f που απέχει από το A(5,0) την μικρότερη

απόσταση είναι το $M_o(1,2)$ και η απόστασή του από το A είναι

$(AM_o)=(AM)_{min}=\sqrt{h_{min}}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

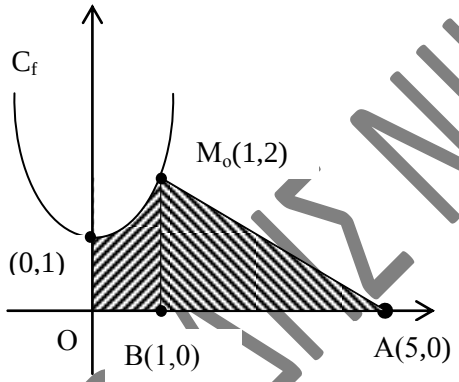
ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

3) α) είναι: $f'(x) = \left(x^2+1\right)' = 2x,\ x \in IR$, οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M_o(1,2)$ είναι $\lambda_\varepsilon = f'(1) = 2$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AM_o είναι $\lambda_{AM_o} = \dfrac{y_{M_o} - y_A}{x_{M_o} - x_A} = \dfrac{2-0}{1-5} = -\dfrac{1}{2}$

Είναι $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AM_o} = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$ οπότε η ευθεία (ε) είναι κάθετη στην ευθεία AM_o

β)



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=E_1+E_2$, όπου E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1 και E_2 είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABM_o.

Είναι $E_1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x^2+1\right)dx = \left[\dfrac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \dfrac{4}{3} - 0 = \dfrac{4}{3}$ τ.μ

και $E_2 = \dfrac{1}{2}(AB)\cdot(BM_o) = \dfrac{1}{2}\cdot 4 \cdot 2 = 4$ τ.μ Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι

$E = E_1 + E_2 = \dfrac{4}{3} + 4 = \dfrac{16}{3}$ τ.μ

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

ΘΕΜΑ 3.

Για την δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : IR \to IR$ ισχύει $x \cdot f''(x) = (x-2) \cdot f'(x) + f(x)$ για κάθε $x \in IR$ και είναι $f'(1) = 1$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

β) Να βρεθεί η $f'(x)$ και η $f''(x)$.

γ) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία , τα τοπικά ακρότατα , την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

δ) Αν $0<\alpha<\beta<1$ να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta \dfrac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1} dx > \ln\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in IR$ έχουμε:

$xf''(x) = (x-2)f'(x) + f(x) \Leftrightarrow x \cdot f''(x) + f'(x) = (x-1)f'(x) + f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f'(x))' \cdot x + f'(x) \cdot (x)' = f'(x) \cdot (x-1) + f(x)(x-1)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (xf'(x))' = ((x-1)f(x))' \Leftrightarrow xf'(x) = (x-1)f(x) + c_1 \quad (c_1 \in IR \text{ σταθερά})$

Για $x = 1$ έχουμε

$1 \cdot f'(1) = (1-1) \cdot f(1) + c_1 \Leftrightarrow c_1 = f'(1) = 1$

Ετσι για κάθε $x \in IR$ έχουμε :

$xf'(x) = (x-1)f(x) + 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = xf(x) + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (xf(x) + 1)' = xf(x) + 1 \Leftrightarrow xf(x) + 1 = c_2 \cdot e^x \quad (c_2 \in IR \text{ σταθερά})$

Για $x = 0$ έχουμε: $\quad 0 \cdot f(0) + 1 = c_2 \cdot e^0 \Leftrightarrow c_2 = 1$

Ετσι για κάθε $x \in IR$ ισχύει $\quad x \cdot f(x) + 1 = e^x \Leftrightarrow x \cdot f(x) = e^x - 1 \quad : (1)$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Απο την (1) έχουμε ότι για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R), έπεται ότι ισχύει: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Άρα είναι:

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^x - 1\right)'}{\left(x\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \text{ αν } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$$

Β. Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)' = \dfrac{\left(e^x - 1\right)' x - \left(e^x - 1\right)\left(x\right)'}{x^2} =$

$$= \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{\left(x - 1\right)e^x + 1}{x^2}$$

Στο $x_0 = 0$, έχουμε

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^x - 1 - x\right)'}{\left(x^2\right)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^x - 1\right)'}{\left(2x\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \in IR,$$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

$$\text{Έτσι έχουμε } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(x - 1\right)e^x + 1}{x^2} & , \text{αν } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Για κάθε $x \neq 0$

$$f''(x) = \left(\frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}\right)' = \frac{\left((x-1)e^x+1\right)' \cdot x^2 - \left((x-1)e^x+1\right)\cdot\left(x^2\right)'}{x^4} =$$

$$= \frac{x^3 \cdot e^x - \left(2x^2 - 2x\right)e^x - 2x}{x^4} = \frac{\left(x^2 - 2x + 2\right)\cdot e^x - 2}{x^3}$$

Στο $x_0 = 0$ έχουμε :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(x-1)e^x+1}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2(x-1)e^x + 2 - x^2}{2x^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[2(x-1)e^x + 2 - x^2\right]'}{\left(2x^3\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot e^x - 2x}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{3x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x - 1\right)'}{(3x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3} = \frac{1}{3} \in IR$$

Άρα η f' είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f''(0) = \frac{1}{3}$

Έτσι έχουμε $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(x^2 - 2x + 2\right)e^x - 2}{x^3} & , \text{αν } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{3} & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Γ) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=(x-1)e^x+1$, $x\in R$

Είναι $g'(x)=\ldots=xe^x$ έχουμε :

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow xe^x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘	min	↗

Από το πρόσημο της $g'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο σημείο $x_0=0$ το οποίο είναι $g_{min}=g(0)=0$.

Επομένως για κάθε $x\in IR$ ισχύει $g(x) \geq g(0) = 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$

Άρα για κάθε $x\neq 0$ ισχύει

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)e^x+1 > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)e^x+1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

Ακόμη είναι $f'(0)=\frac{1}{2}>0$, έτσι για κάθε $x\in R$ είναι $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = (x^2-2x+2)e^x-2$, $x \in IR$

Είναι $\varphi'(x) = \ldots = (2x-2)e^x+(x^2-2x+2)e^x = x^2\cdot e^x \geq 0$ για κάθε $x\in R$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$, οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο IR

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Έτσι

1) για κάθε x>0 έχουμε

$$x > 0 \overset{(\varphi\uparrow R)}{\Rightarrow} \varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow (x^2 - 2x + 2)\cdot e^x - 2 > 0$$

$$\overset{(x^3>0)}{\Rightarrow} \frac{\left(x^2 - 2x + 2\right)e^x - 2}{x^3} > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

2) για κάθε x<0 έχουμε

$$x < 0 \overset{(\varphi\uparrow R)}{\Rightarrow} \varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow (x^2 - 2x + 2)e^x - 2 < 0$$

$$\overset{(x^3<0)}{\Rightarrow} \frac{\left(x^2 - 2x + 2\right)e^x - 2}{x^3} > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

3) $f''(0) = \frac{1}{3} > 0$

Έτσι για κάθε $x \in IR$ ισχύει $f''(x) > 0$ οπότε η f είναι κυρτή στο IR και η C_f δεν έχει σημείο καμπής

Δ) Έστω $0 < \alpha < \beta < 1$.Για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ έχουμε:

$$0 < x^2 < x < 1 \Rightarrow f(x) > f(x^2), \left(\text{αφού } f \uparrow IR\right) \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} > \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1} > \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1} - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta \left(\frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1} - \frac{1}{x}\right)dx > 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1}dx - \int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1}dx > \int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1}\, dx > \left[\ln x\right]_\alpha^\beta = \ln\beta - \ln\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1}dx > \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

ΘΕΜΑ 4

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to IR$ ισχύει :

$xf(x)+x^2f'(x)=\dfrac{x+1}{1+e^{x\cdot f(x)}}$ για κάθε x>0 και f(1)=0.

1) Να δείξετε ότι:

α) $xf(x)+e^{xf(x)}=x+\ln x$, για κάθε $x>0$.

β) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$

2) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να δείξετε ότι $\ln x\le\dfrac{x}{e}$ για κάθε x>0

3) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha\in(1,e)$ ισχύει : $e^{\int_\alpha^e\frac{1}{\ln x}dx}>\left(\dfrac{e}{\alpha}\right)^e$

4) Να βρεθούν οι α,β>0, ώστε $\alpha^\beta\cdot\beta^\alpha=e^{\frac{2\alpha\beta}{e}}$

5) Να λυθεί στο $(0,+\infty)$ η εξίσωση : $2^x=x^2$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

ΛΥΣΗ

1) α) Για κάθε x>0 έχουμε:

$$xf(x)+x^2f'(x)=\frac{x+1}{1+e^{xf(x)}}\Leftrightarrow\left(f(x)+xf'(x)\right)\left(1+e^{xf(x)}\right)=\frac{x+1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'\cdot\left(1+e^{xf(x)}\right)=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'+e^{xf(x)}\left(xf(x)\right)'=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'+\left(e^{xf(x)}\right)'=1+\frac{1}{x}\overset{(x>0)}{\Leftrightarrow}\left[xf(x)+e^{xf(x)}\right]'=\left(x+\ln x\right)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xf(x)+e^{xf(x)}=x+\ln x+c\ ,\ \left(c\in IR\ \text{σταθερά}\right)$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$1\cdot f(1)+e^{1\cdot f(1)}=1+\ln 1+c\Leftrightarrow f(1)+e^{f(1)}=1+c\Leftrightarrow 0+e^0=1+c\Leftrightarrow c=0$$

Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει $xf(x)+e^{xf(x)}=x+\ln x$: (1)

β) Θεωρούμε την συνάρτηση

$g(x)=x+e^x,\ x\in IR.$

Είναι $g'(x)=1+e^x>0$ για κάθε $x\in IR$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Επομένως η g είναι συνάρτηση 1-1.

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$xf(x)+e^{xf(x)}=x+\ln x\Leftrightarrow xf(x)+e^{xf(x)}=\ln x+e^{\ln x}\Leftrightarrow g\left(xf(x)\right)=g\left(\ln x\right)\overset{(g\ \text{"1-1"})}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow xf(x)=\ln x\ \Leftrightarrow\ f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

Άρα είναι $f(x)=\frac{\ln x}{x},\ x>0$. (Είναι φανερό ότι ικανοποιεί την υπόθεση)

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

2) Είναι $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-(\ln x)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

έχουμε :

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\ln x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<\ln e \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\overset{(\ln x\uparrow(0,+\infty))}{\Leftrightarrow} \begin{matrix} x<e \\ x>0 \end{matrix} \Leftrightarrow 0<x<e$$

Ακόμη $\begin{cases} f'(x)<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>e$ και $\begin{cases} f'(x)=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=e$

x	0		e		$+\infty$
f ΄(x)		+	0	-	
f(x)		↗	max	↘	

Από το πρόσημο της f΄(x) που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$,

οπότε η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο στο $x_0=e$, το οποίο είναι το

$\max f(x)=f(e)=\frac{1}{e}$.

Επειδή η f έχει ολικό μέγιστο έπεται ότι για κάθε x>0 ισχύει

$f(x)\le \max f(x) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x\le\frac{x}{e}$

Επομένως για κάθε x>0 ισχύει $\ln x\le\frac{x}{e}$: (2) με την ισότητα να ισχύει μόνο

για x=e.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

3) Για κάθε x>0 ισχύει $\ln x \le \frac{x}{e}$ με την ισότητα μόνο για x=e

Έτσι για κάθε $\alpha \in (1,e)$και για κάθε $x \in [\alpha, e]$ισχύει:

$$1 < \alpha \le x \le e \overset{(2)}{\Rightarrow} 0 < \ln\alpha \le \ln x \le \frac{x}{e} \Rightarrow \frac{1}{\ln x} \ge \frac{e}{x} \Rightarrow \frac{1}{\ln x} - \frac{e}{x} \ge 0$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=e.

Επομένως είναι:

$$\int_\alpha^e \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{e}{x}\right) dx > 0 \Rightarrow \int_\alpha^e \frac{1}{\ln x} dx - \int_\alpha^e \frac{e}{x} dx > 0 \Rightarrow$$

$$\int_\alpha^e \frac{1}{\ln x} dx > \int_\alpha^e \frac{e}{x} dx = e[\ln x]_\alpha^e = e \cdot (\ln e - \ln\alpha) = e\ln\left(\frac{e}{\alpha}\right) =$$

$$= \ln\left[\left(\frac{e}{\alpha}\right)^e\right] \overset{(e^x \uparrow IR)}{\Rightarrow} e^{\int_\alpha^e \frac{1}{\ln x} dx} > e^{\ln\left[\left(\frac{e}{\alpha}\right)^e\right]} \Rightarrow e^{\int_\alpha^e \frac{1}{\ln x} dx} > \left(\frac{e}{\alpha}\right)^e$$

4) $\ldots \alpha^\beta \cdot \beta^\alpha = e^{\frac{2\alpha\beta}{e}} : (E)$

Έχουμε: $(E) \Leftrightarrow \ln(\alpha^\beta \cdot \beta^\alpha) = \ln\left(e^{\frac{2\alpha\beta}{e}}\right)$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha^\beta) + \ln(\beta^\alpha) = \frac{2\alpha\beta}{e} \Leftrightarrow \beta\ln\alpha + \alpha\ln\beta = \frac{2\alpha\beta}{e} \Leftrightarrow \frac{\beta\ln\alpha + \alpha\ln\beta}{\alpha\beta} = \frac{2}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\alpha}{\alpha} + \frac{\ln\beta}{\beta} = \frac{2}{e} \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) = \frac{2}{e} \quad : (\Sigma)$$

Από το (2) ερώτημα έχουμε ότι για κάθε x>0 ισχύει:

$f(x) \le \max f(x) = f(e) = \frac{1}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=e.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Έτσι ισχύουν: $f(\alpha) \le \frac{1}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για α=e και $f(\beta) \le \frac{1}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για β=e

Έτσι είναι $f(\alpha) + f(e) \le \frac{2}{e}$ και την ισότητα να ισχύει μόνο όταν α=e και β=e . Επομένως για να ισχύει η (Σ), οπότε και η ισοδύναμη της σχέση (Ε) , πρέπει και αρκεί να είναι α=β=e

5) Έχουμε: $2^x = x^2,\ x > 0$

$\Leftrightarrow \ln(2^x) = \ln(x^2),\ \ x > 0 \Leftrightarrow x\ln2 = 2\ln x,\ \ x > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln2}{2},\ \ x > 0 \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{\ln2}{2},\ \ x > 0$

Έτσι η εξίσωση: $2^x = x^2,\ \ x > 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = \frac{\ln2}{2}$

Για το $x_1=2 \in (0, e]$ ισχύει $f(2) = \frac{\ln2}{2}$ οπότε το $x_1=2$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = \frac{\ln2}{2}$ και μάλιστα μοναδική στο $(0, e]$, αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $(0, e]$

Για το $x_2=4 \in (e, +\infty)$ ισχύει $f(4) = \frac{\ln4}{4} = \frac{\ln(2^2)}{4} = \frac{2\ln2}{4} = \frac{\ln2}{2}$

οπότε το $x_2=4$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = \frac{\ln2}{2}$ και μάλιστα μοναδική στο $(e, +\infty)$ αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $(e, +\infty)$.

Από τα παρακάτω προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{\ln2}{2}$ οπότε και η ισοδύναμή της εξίσωσης $2^x=x^2$,x> 0 έχει ακριβώς δυο ρίζες στο $(0, +\infty)$ οι οποίες είναι :$x_1=2$,$x_2=4$.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

ΘΕΜΑ 5

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f: IR→IRισχύει

$$f'(x) = 3x^2 + \left(\int_{-1}^{1} f(t)dt - f(0)\right) \cdot \int_{x}^{x+1} e^{t \cdot f(t)} dt$$

για κάθε $x \in IR$ και $f(2)=f(1)+7$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$, ώστε $f'(\xi)=3\xi^2$

2. Να δείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(t)dt = f(0)$

3. Να βρεθεί ο τύπος της f

4.Έστω (ε) η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $M(\alpha,f(\alpha))$, με $\alpha > 0$

α) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την εφαπτομένη (ε)

β) Αν το α αυξάνεται με ρυθμό 3cm/sec(τα μήκη των μοναδιαίων διανυσμάτων των αξόνων είναι 1cm) να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε ως προς τον χρόνο t την χρονική στιγμή t_o κατά την οποία είναι $E=108cm^2$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

ΛΥΣΗ

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^3$

   Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-3x^2$,

   οπότε η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο (1,2).

Ακόμη είναι $g(1)=f(1)-1^3=f(1)-1$ και $g(2)=f(2)-2^3=f(2)-8$

Είναι όμως $f(2)=f(1)+7$, οπότε $g(2)=(f(1)+7)-8=f(1)-1$.

Άρα είναι $g(2)=g(1)$

Επομένως η gικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Rolle

στο $[1,2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(\xi)-3\xi^2=0\Leftrightarrow f'(\xi)=3\xi^2$

2. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ισχύει :

$$f'(x)=3x^2+\left(\int_{-1}^{1}f(t)dt-f(0)\right)\cdot\int_{x}^{x+1}e^{tf(t)}dt \quad :(1)$$

Από την (1) για $x=\xi$ έχουμε:

$$f'(\xi)=3\xi^2+\left(\int_{-1}^{1}f(t)dt-f(0)\right)\cdot\int_{\xi}^{\xi+1}e^{t\cdot f(t)}dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\xi^2=3\xi^2+\left(\int_{-1}^{1}f(t)dt-f(0)\right)\cdot\int_{\xi}^{\xi+1}e^{t\cdot f(t)}dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\int_{-1}^{1}f(t)dt-f(0)\right)\cdot\int_{\xi}^{\xi+1}e^{t\cdot f(t)}dt=0 \quad :(2)$$

είναι $\xi<\xi+1$ και για κάθε $t\in[\xi,\xi+1]$

ισχύει $e^{t\cdot f(t)}dt>0$, οπότε είναι $\int_{\xi}^{\xi+1}e^{t\cdot f(t)}dt>0$

Έτσι απο την (2) προκύπτει ότι

$$\int_{-1}^{1}f(t)dt-f(0)=0\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}f(t)dt-f(0)=0 \quad :(3)$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

3. Από την (1) λόγω της (3) έχουμε ότι για κάθε $x \in IR$ισχύει :

$$f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)' = \left(x^3\right)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 + c\,,\left(c \in IR\text{σταθερά}\right)$$

Έχουμε όμως $\int_{-1}^{1} f(t)dt = f(0) \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\left(t^3 + c\right)dt = 0^3 + c \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{t^4}{4} + ct\right]_{-1}^{1} = c \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} + c\right) - \left(\frac{1}{4} - c\right) = c \Leftrightarrow 2c = c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα $f(x) = x^3, x \in IR$ (ικανοποιεί την υπόθεση)

4. α) Είναι $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f(\alpha) = \alpha^3$, $f'(\alpha) = 3\alpha^2$
οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_fστο σημείο της Μ $(\alpha,f(\alpha))$, $\alpha > 0$

είναι $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \alpha^3 = 3\alpha^2(x - \alpha) \Leftrightarrow y = 3\alpha^2x - 2\alpha^3$
Άρα είναι (ε) : $y = 3\alpha^2x - 2\alpha^3$

Βρίσκουμε τις τετμημένες των κοινών της ευθείας (ε)

και της C_f
Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 3\alpha^2x - 2\alpha^3$
Έχουμε : $f(x) = 3\alpha^2x - 2\alpha^3 \Leftrightarrow x^3 - 3\alpha^2x + 2\alpha^3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - \alpha^3 - 3\alpha^2x + 3\alpha^3 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \alpha\right)\left(x^2 + \alpha x + \alpha^2\right) - 3\alpha^2\left(x - \alpha\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \alpha\right)\left(x^2 + \alpha x - 2\alpha^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \alpha\right)\left(x - \alpha\right)\left(x + 2\alpha\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \alpha\right)^2 \cdot \left(x + 2\alpha\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \alpha\right)^2 = 0 \\ \text{ή} \\ x + 2\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ \text{ή} \\ x = -2\alpha \end{cases}$$

Άρα τα κοινά σημεία των C_f και (ε) είναι $M\left(\alpha, f\left(\alpha\right)\right)$ και
$N\left(-2\alpha, f\left(-2\alpha\right)\right)$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Το εμβαδόν του χωρίου Ω όπου περικλείεται από την C_f και

την (ε) είναι: $E=\int_{-2\alpha}^{\alpha}\left|f(x)-\left(3\alpha^2x-2\alpha^3\right)\right|dx=\int_{-2\alpha}^{\alpha}\left|x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3\right|dx$

Είναι $x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3=(x-\alpha)^2(x+2\alpha)\geq 0$ για κάθε $x\in[-2\alpha,\alpha]$, $(\alpha>0)$

Έτσι είναι:

$$E=\int_{-2\alpha}^{\alpha}\left(x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3\right)dx=\int_{-2\alpha}^{\alpha}x^3dx-3\alpha^2\int_{-2\alpha}^{\alpha}xdx+\int_{-2\alpha}^{\alpha}2\alpha^3dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2\alpha}^{\alpha}-3\alpha^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2\alpha}^{\alpha}+2\alpha^3\left(\alpha-(-2\alpha)\right)=\frac{1}{4}\left(\alpha^4-16\alpha^4\right)-\frac{3\alpha^2}{2}\left(\alpha^2-4\alpha^2\right)+6\alpha^4=$$

$$=-\frac{15}{4}\alpha^4+\frac{9\alpha^4}{2}+6\alpha^4=\frac{27}{4}\alpha^4\ \text{cm}^2.$$ Άρα είναι $E=\frac{27}{4}\alpha^4\left(\text{cm}^2\right)$.

β) Έστω κατά την χρονική στιγμή t sec είναι $\alpha=\alpha(t)$ cm και $E=E(t)$ cm^2.

Είναι $E(t)=\frac{27}{4}\alpha^4(t)$, οπότε παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε

$$E'(t)=\frac{27}{4}4\alpha^3(t)\alpha'(t)=27\alpha^3(t)\cdot\alpha'(t)$$

Για την χρονική στιγμή t_o κατά την οποία είναι $E=108\text{cm}^2$

Έχουμε $E'(t_o)=27\alpha^3(t_o)\cdot\alpha'(t_o)$

Έχουμε όμως :

$$\alpha'(t_o)=3\text{cm/sec}\ \text{και}\ E(t_o)=108\Leftrightarrow\frac{27}{4}\alpha^4(t_o)=108\Leftrightarrow\alpha^4(t_o)=16\overset{\alpha(t_o)>0}{\Leftrightarrow}\alpha(t_o)=2(\text{cm})$$

Έτσι ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι :

$$E'(t_o)=27\cdot 2^3\cdot 3=648\,\text{cm}^2/\text{sec}$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Για την συνάρτηση $f:IR \to IR$ ισχύει $2f(x) + f(1-x) = x+1$

   για κάθε $x \in IR$.Να βρεθεί ο τύπος της f.

2. Για την συνάρτηση $f:IR \to IR$ ισχύει $\left(f(x)\right)^2 \cdot f(1-x) = e^{x+1}$

   για κάθε $x \in IR$.Να βρεθεί ο τύπος της f.

3. Για την συνάρτηση $f:[0,1] \to IR$ ισχύει $|f(x)-f(y)| \le |x-y|$ για κάθε $x, y \in [0,1]$ και είναι f(0)=0 και f(1)=1.

   Να βρείτε τον τύπο της f.

4. Για την συνάρτηση $f: IR_+^* \to IR$ ισχύει $f(x) \ge \ln x + x$ για κάθε $x > 0$ και είναι :
   $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

   Να βρεθεί ο τύπος της f.

5. Η συνάρτηση $f:IR \to IR$ είναι γνησίως αύξουσα στο IR και ισχύει $f\left(2f(x)\right) = \frac{x}{2}$, για κάθε $x \in R$.

   Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in R$.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

6. Για την συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει $f\left(f(x)\right)+f(x)=2x$ για κάθε $x\in IR$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

   Να δείξετε ότι $f(x)=x$, $x\in IR$.

7. Για την συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει $\left|f(x)-f(y)\right|\le 2\left|x-y\right|$ για κάθε $x,y\in IR$.

   α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-3x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

   β) Αν επιπλέον ισχύει $f\left(f(x)\right)+3x=4f(x)$ για κάθε $x\in IR$, να βρείτε τον τύπο της f.

8. Αν για την συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει $\left|f(x)-f(y)\right|\le\left(e^x-e^y\right)^2$ για κάθε $x,y\in IR$.

   Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή .

9. α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ και η παράγωγος της .

   β) Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει $f'(x)=\sqrt{1+f^2(x)}$ για κάθε $x\in IR$ και $f(0)=0$.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

10. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to IR$

ισχύει $f'(x)=f^2(x)$ για κάθε $x\geq 0$ και $f(0)=-1$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot e^{-\int_0^x f(t)dt}, x\geq 0$

είναι σταθερή στο $[0,+\infty)$.

β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

11. Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης

$f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει $f(x)\cdot f'(x)=e^{2x}$

για κάθε $x\in IR$ και $f(0)=1$.

12. Να βρεθεί ο τύπος της δυο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:IR^*\to IR$ για την οποία ισχύει $x^2\cdot f''(x)=1$ για κάθε $x\neq 0$.

13. Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει $f'(x)=e^{f(x)-x}$ για κάθε $x\in IR$ και $f(0)=0$.

14. Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει

$f'(x)=f(x)+e^x\cdot \text{συν}x$ για κάθε $x\in IR$ και $f(0)=0$.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

15. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : IR \to IR$ για την οποία ισχύει $\left(f'(x) + f(x)\right)e^{2x} = f(x) - f'(x)$ για κάθε $x \in IR$ και $f(0)=1$.

16. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR \to IR$ ισχύει $\left(f'(x)\right)^2 \le -f(\alpha) \cdot f(\alpha+1)$ για κάθε $x \in IR$, $(\alpha \in IR)$.

    Να δείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x \in IR$.

17. Για την δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : IR_+^* \to IR$ ισχύει $f''(x) \cdot e^{2f(x)} = -1$ για κάθε $x \in IR_+^*$

    και $f(1) = 0, f'(1) = 1$.

    Να βρεθεί ο τύπος της f.

18. Να βρείτε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : IR \to IR$,

    με $f(0)=1$ και $g(0)=-1$, αν για κάθε $x \in IR$ ισχύουν $f'(x) \cdot g(x) = 2e^x$ και $f(x) \cdot g'(x) = -3e^x$.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

19. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : IR_+^* \to IR$ ισχύει

$xyf(xy) = xf(x) + yf(y)$ για κάθε $x, y \in IR_+^*$ και είναι $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1.$

1) Να βρεθεί το $f'(1)$.

2) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$.

3) Να βρείτε τον τύπο της f.

20. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, \pi) \to IR$ ισχύει

$f'(x) \cdot \eta\mu x = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + f(x) \cdot \eta\mu x$

για κάθε $x \in (0, \pi)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Να βρείτε τον τύπο της f.

21. Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης

$f : (0, +\infty) \to IR$ για την οποία ισχύει

$f'(x) = -2\left(f(x)\right)^3$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = \frac{1}{2}$.

22. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to IR$ για την οποία

ισχύει

$f(x) = 1 + \int_0^x \frac{1 - f(t)\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu t}\, dt$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

23. Για την συνεχή συνάρτηση f:IR→IR ισχύει

$$9\cdot\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 + x^2 = f(x)+1 \text{ για κάθε } x \in IR.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

24. Για την συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to IR$ ισχύει

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx - \frac{1}{12}.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

25. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to IR$

για την οποία ισχύουν f(1)=0 και $f'(x) - \int_1^e \frac{f(t)}{t}dt = \ln x$ για κάθε $x > 0$.

26. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: IR \to IR^*$ για την οποία ισχύει

$\int_0^x e^t f(x-t)dt = \eta\mu^2 x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

27. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to IR$ ισχύει

$f(x) = x^{2013}\cdot(1-x)^{2014}\cdot f'(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Να δείξετε ότι $f(x)=0$, $x\in[0,1]$.

28. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to IR$ ισχύει

$f(x) = x^2+(x-\alpha)^2\cdot(x-\beta)^2\cdot(f'(x)-2x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Να δείξετε ότι $f(x) = x^2$, $x\in[\alpha,\beta]$.

29. Για την συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to IR$ ισχύει

$\int_0^1 f^2(x)dx = 4\int_0^1 xf(x)dx - \frac{4}{3}$.

Να δείξετε ότι $f(x) = 2x$, $x\in[0,1]$.

30. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει

$f'(x) = 1+f(x)-f(1-x)$, για κάθε $x\in IR$ και $f(0)=1$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

31. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει

$f'(x) = f^2(x)\cdot f(-x),\ \forall x \in IR$ και $f(0) = 1$.

Να βρεθεί η συνάρτηση f.

32. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης

$f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει

$1 + f'(x) = (2x+1)e^{x^2+1-f(x)}$ για κάθε $x\in IR$ και $f(0)=1$.

33. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει $e^x \cdot f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in IR$ και $f(0)=1$.

34. Για την συνάρτηση $f : IR_+^* \to IR$ ισχύει $|yf(x) - xf(y)| \le xy(x-y)^2$ για κάθε $x,y\in IR_+^*$

1) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}, x > 0$ είναι σταθερή .

2) Να βρείτε τον τύπο της f.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

35. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης $f:IR\to IR$ για την οποία ισχύει

$$3x\cdot\int_0^1 f(x\cdot t)dt + 6\int_0^{\frac{x}{2}} f(2t)dt = 2\int_0^x xtdt + x^3 \text{ για κάθε } x\in IR.$$

36. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f:IR\to IR$ με $f(x) = \int_1^e t^x dt$.

(*χωρίς το σύμβολο του ολοκληρώματος*)

37. Για την συνεχή συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει

$$2\cdot\int_0^x f(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(t)dt = 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x\in IR.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

38. Για την συνεχή συνάρτηση $f : IR_+^* \to IR$ ισχύει

$$f(x) = \int_1^x \frac{t+1}{te^{f(t)} + t}dt \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

39. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR\to IR$ ισχύει

$$f(x + y) \geq f(x) + f(y) + 2xy \text{ για κάθε } x,y\in IR$$

και είναι $f(0)=f'(0)=0$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

40. Για την συνεχή συνάρτηση f:IR→IR ισχύει

$$f(x) = \left(2 + \eta\mu x\right) \cdot \left(\int_0^x \frac{f(t)}{2 + \eta\mu t} dt + 1\right) \text{ για κάθε } x \in IR.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

41. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : IR_+^* \to IR$ ισχύει

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(e^{xh} - 1\right)\left(f(x + 2h) - f\left(x + h\right)\right)}{h^2} = \left(x - 1\right) f(x) \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=e.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

42. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης f:IR→IR για την οποία ισχύει $\int_{f(x)+1}^{f'(x)} \left(f^2(t) - f(t)\right) dt + f'(x) = f(x) + 1$ για κάθε $x \in IR$ και f(0)=0.

43. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης f:IR→IR για την οποία ισχύει

$$\int_0^x e^t \cdot f\left(x - t\right) dt = f(x) + e^x \text{ για κάθε } x \in R.$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

44. α) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & ,x>0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

β) Να βρείτε τις παράγουσες της f.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , των ευθειών $x=0$, $x=e$ και του άξονα $x'x$.

45. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f:IR_+^*\to IR$ για την οποία ισχύει $2\cdot f(x)-\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(x\cdot t)dt=\dfrac{4\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}$ για κάθε $x>0$.

46. Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$ για κάθε $x,y\in R$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=0$ με $f'(0)=0$.

1) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R

2) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3$, $x\in R$.

47. Για τη συνεχή συνάρτηση $f:(-1,1)\to R$ ισχύει

$$\eta\mu\left(\int_0^x f(t)dt\right)=x \text{ για κάθε } x\in(-1,1).$$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ