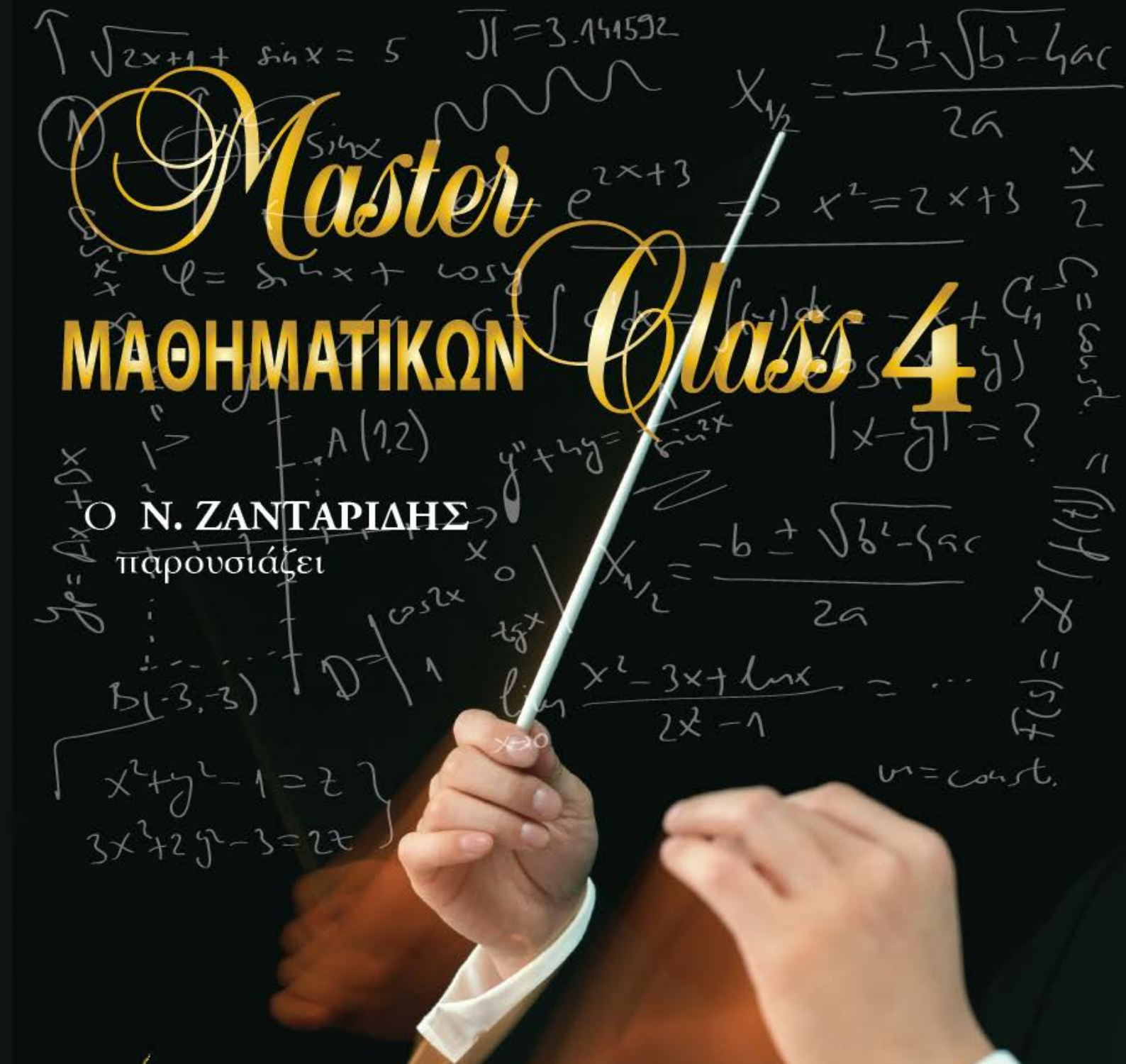
Master Class 4

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ο **Ν. ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**
παρουσιάζει



Μονοτονία συνάρτησης

- ΕΝΑ ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
- ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

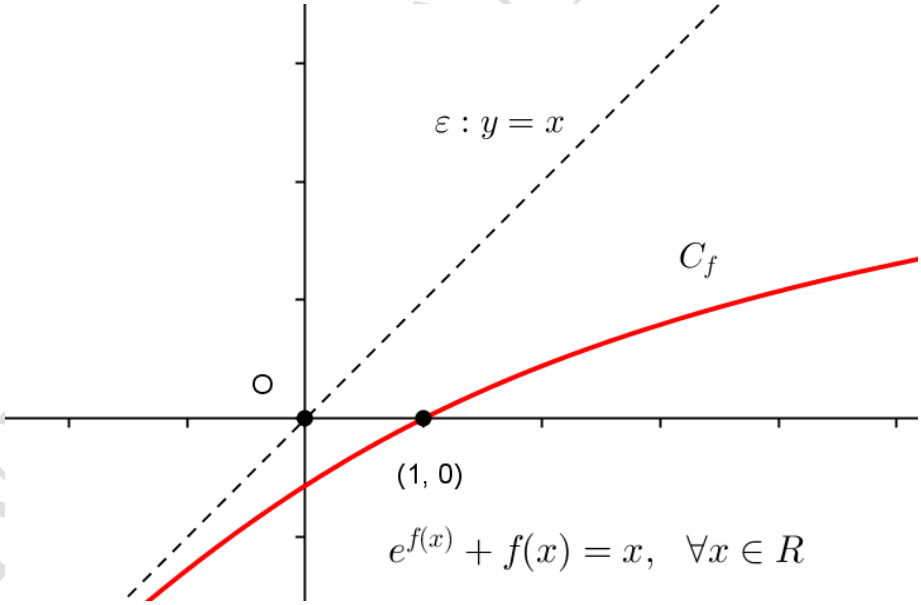
Γιάννης Απλακίδης

Νίκος Ζανταρίδης
(Φροντιστήριο Πυραμίδα)

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Ένα γενικό θέμα Ανάλυσης
- Χρήσιμες Προτάσεις
- Ασκήσεις για λύση

Μικρό βοήθημα
για τον υποψήφιο μαθητή της Γ' Λυκείου
λίγο πριν τις εξετάσεις



Απρίλιος 2014

Επιμέλεια
Κώστας Δόρτσιος
Μάκης Χατζόπουλος

Πρόλογος

Το μικρό αυτό πόνημα απευθύνεται κυρίως προς τους μαθητές της Γ' Λυκείου οι οποίοι εξετάζονται στις Πανελλαδικές Εξετάσεις στο μάθημα των Μαθηματικών, ταυτόχρονα όμως μπορεί να αποτελέσει κι ένα ανάγνωσμα οποιουδήποτε άλλου που ασχολείται ευρύτερα με τα Μαθηματικά.

Η μέχρι τώρα εμπειρία διδάσκει ότι η έννοια της μονοτονίας είναι μια έννοια αρκετά ενδιαφέρουσα και χρήσιμη σε όλη την έκταση της εξεταζόμενης ύλης. Η μονοτονία διαποτίζει και υποστηρίζει σχεδόν πάντοτε τα προβλήματα που τίθενται στις εξετάσεις, όπως για παράδειγμα τα προβλήματα που αφορούν ανισότητες, ανισώσεις, ακρότατες τιμές, εξισώσεις και διάφορα άλλα. Έτσι μια συνολική θεώρηση της μονοτονίας μέσα από το παρόν πόνημα ελπίζω ότι θα προσφέρει στον υποψήφιο μαθητή αρκετή γνώση και εμπειρία στην αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών.

Ειδικότερα το θέμα με τίτλο: «Ένα γενικό θέμα Ανάλυσης» εμφανίζει μέσα από τα 21 επεξεργασμένα ερωτήματα μια συνολική εικόνα της δυναμικής που εμπεριέχεται στην έννοια της μονοτονίας.

Στην ίδια αντίληψη κινείται και το δεύτερο τμήμα όπου παρουσιάζονται 13 διάφορες χρήσιμες προτάσεις που καποιες από αυτές σχετίζονται με τη μονοτονία. Τέλος μια σειρά από 38 ασκήσεις αποτελούν μια πρόκληση και μια δοκιμασία για μια τελική αυτοαξιολόγηση του υποψήφιου μαθητή.

Τέλος αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω τους φίλους μαθηματικούς Κώστα Δόρτσιο και Μάκη Χατζόπουλο για την επιμέλεια των κειμένων.

Νίκος Ζανταρίδης

Έδεσσα
Απρίλιος 2014

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

Γενικό Θέμα Ανάλυσης

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ ***για την οποία ισχύει:***

$$e^{f(x)} + f(x) = x, \quad \textbf{\textit{για κάθε}}\ x \in R$$

1. ***Να δειχθεί ότι η συνάρτηση*** f ***είναι*** $1-1$
2. ***Να μελετηθεί η*** f ***ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.***
3. ***Να δειχθεί ότι*** $f(1)=0$ ***και να βρείτε το πρόσημο της*** f
4. ***Να βρείτε το σύνολο τιμών της*** f
5. ***Να βρείτε τα όρια:*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
6. ***Να οριστεί η*** f^{-1}
7. ***Να δειχθεί ότι:*** $f\left(e^x + x\right) = x$ ***για κάθε*** $x \in R$
8. ***Να μελετηθεί η*** f ***ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.***
9. ***Να λυθεί η ανίσωση:*** $f(x) > x-1$
10. ***Να βρείτε το*** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ***και το*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
11. ***Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της*** C_f ***η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.***
12. ***Να δειχθεί ότι:*** $2\int_1^x f(t)dt \le (x-1)^2, \quad \forall x \in R$
13. ***Να δειχθεί ότι:*** $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \ge \dfrac{f(a)+f(b)}{2}, \quad \forall a,b \in R$
14. ***Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης*** (η) ***της*** C_f ***η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία*** $\delta: y = \dfrac{1}{2}x + 2011$
15. ***Να εξεταστεί αν υπάρχουν ασύμπτωτες της*** C_f ***στο*** $+\infty$ ***ή στο*** $-\infty$.
16. ***Να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση της*** f.
17. ***Να βρεθεί το*** $\int_0^1 f(x)dx$ ***συναρτήσει του*** $f(0)$.
18. ***Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την*** C_f, ***την ασύμπτωτη της*** C_f ***στο*** $-\infty$ ***και τις ευθείες*** $x=1$ ***και*** $x=1+e$

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

19. Να δειχθεί ότι: $f(x) < x, \quad \forall x \in R$

20. Να δειχθεί ότι: $(x-1)f(x) < f(x) < \dfrac{x-1}{2}, \quad \forall x > 1$

21. Να δειχθεί ότι οι C_f ***και*** $C_{f^{-1}}$ ***δεν έχουν κοινά σημεία.***

Απαντήσεις

1. $e^{f(x)} + f(x) = x \quad :(1)$

$$...f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \\ f(x_1) = f(x_2) \end{cases} \Rightarrow e^{f(x_1)} + f(x_1) = e^{f(x_2)} + f(x_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι συνάρτηση $1-1$.

2. <u>1ος τρόπος:</u> $(1) \Rightarrow \left(e^{f(x)} + f(x)\right)' = (x)' \Rightarrow e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1$

$$\left(e^{f(x)} + 1\right) f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1} > 0, \forall x \in R$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

<u>2ος τρόπος:</u> Θεωρώ την $g(x) = e^x + x, \forall x \in R$. Είναι $g'(x) = e^x + 1 > 0, \forall x \in R$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

Η (1) γράφεται $g\left(f(x)\right) = x : (2)$

Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε

$$x_1 < x_2 \overset{(2)}{\Rightarrow} g\left(f(x_1)\right) < g\left(f(x_1)\right) \overset{(**)}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2)$$

(* * αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο R)

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

<u>3ος τρόπος:</u> Απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο R, τότε <u>θα υπάρχουν</u> $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$. Έχουμε:

$f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow g\left(f(x_1)\right) \geq g\left(f(x_2)\right)$ (γιατί η g γν. αύξουσα στο R)

$\overset{(2)}{\Rightarrow} x_1 \geq x_2$,ΑΤΟΠΟ, αφού $x_1 < x_2$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R .

3. Από την (1) για $x = 1$ έχουμε:

$e^{f(1)} + f(1) = 1 \Leftrightarrow g\left(f(1)\right) = g(0), \left(g(0) = e^0 + 0 = 1\right)$

$\Leftrightarrow f(1) = 0$

(γιατί η g ως γνησίως μονότονη στο R είναι συνάρτηση $1-1$)

Έχουμε:

- $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1), \left(f \uparrow R\right)$

  $\Rightarrow f(x) > 0$

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

- $x<1 \Rightarrow f(x)<f(1), (f \uparrow R)$
  $\Rightarrow f(x)<0$

Άρα:

$f(x)<0$, για κάθε $x \in (-\infty,1)$
$f(x)>0$, για κάθε $x \in (1,+\infty)$
$f(1)=0$

4. $\ldots f(x)=y \Leftrightarrow g(f(x))=g(y)$
(γιατί η g ως γν. μονότονη στο R είναι συνάρτηση $1-1$)

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} x=g(y)$$

Άρα για κάθε $y \in R$ η εξίσωση $f(x)=y$ έχει λύση ως προς x στο $D_f=R$ η οποία είναι $x=g(y)=e^y+y$, οπότε $f(R) \supseteq R$ και επειδή είναι και $f(R) \subseteq R$, έπεται ότι $f(R)=R$.

5. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R έπεται ότι:

$$f(R)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

Όμως είναι: $f(R)=R=(-\infty,+\infty)$, οπότε:

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

Επομένως είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

6. Η f ως γνησίως μονότονη στο R είναι συνάρτηση $1-1$, οπότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το $f(R)=R$ και επειδή ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=g(y)=e^y+y$$

έπεται ότι: $f^{-1}(y)=e^y+y$.

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}: R \to R \ \mu\varepsilon \ f^{-1}(x)=e^x+x$$

7. Για κάθε $x \in f(R)=R$ ισχύει:

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Leftrightarrow f\left(e^x+x\right)=x \quad :(3)$$

8. Είναι: $f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}+1}$, οπότε η f' είναι παραγωγίσιμη στο R ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=-\frac{\left(e^{f(x)}+1\right)'}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}=-\frac{1}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}\cdot e^{f(x)} f'(x)=$$

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

$$=-\frac{1}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}e^{f(x)}\cdot\frac{1}{e^{f(x)}+1}=-\frac{e^{f(x)}}{\left(e^{f(x)}+1\right)^3}<0,\quad \forall x\in R$$

Άρα η f είναι κοίλη στο R και η C_f δεν έχει σημείο καμπής.

9. Έχουμε:

$$e^{f(x)}+f(x)=x\Rightarrow f(x)=x-e^{f(x)}\quad :(4)$$

έτσι προκύπτει:

$$f(x)>x-1\Leftrightarrow x-e^{f(x)}>x-1\Leftrightarrow e^{f(x)}<e^0\Leftrightarrow f(x)<0,\left(e^x\uparrow R\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x)<f(1),\quad (f(1)=0)$$

$$\Leftrightarrow x<1,\left(f\uparrow R\right)$$

Άρα η δοθείσα ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,1)$.

10. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(x)\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{f(x)}}\underset{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\right)}{\overset{(u=f(x))}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{1+e^u}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(f(x)\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^{f(x)}}\underset{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\right)}{\overset{(u=f(x))}{=}}\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{1+e^u}=\frac{1}{1+0}=1$$

11. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $M\left(x_o,f(x_0)\right)$ είναι:

$$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$$

Για να διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$0-f(x_o)=f'(x_o)(0-x_o)\Leftrightarrow x_of'(x_o)-f(x_o)=0$$

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση:

$$xf'(x)-f(x)=0,\quad (E)$$

έχει μοναδική λύση στο R.

Είναι: $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{f(x)}}$ και $x=e^{f(x)}+f(x)$, οπότε η εξίσωση (E) είναι ισοδύναμη με την:

$$\left(e^{f(x)}+f(x)\right)\frac{1}{1+e^{f(x)}}-f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)-f(x)-f(x)e^{f(x)}=0$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}\left(1-f(x)\right)=0\Leftrightarrow f(x)=1$$

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

Επειδή όμως $1 \in f(R) = R$ έπεται ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει λύση στο R και μάλιστα μοναδική, αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο R.

Επομένως ***υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της*** C_f ***η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.***

12. $$...\phi(x) = 2\int_1^x f(t)dt - (x-1)^2, \quad x \in R$$

Είναι:

$$\phi'(x) = 2f(x) - 2(x-1)(x-1)' = 2\left(f(x) - x + 1\right)$$

$$...\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > x - 1$$

$\Leftrightarrow x - e^{f(x)} > x - 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} < 1 = e^0$

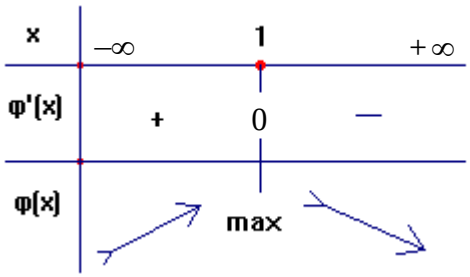
$\Leftrightarrow f(x) < 0, \left(e^x \uparrow\right)$

$\Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow x < 1, \left(f \uparrow R\right)$

Όμοια:

$\phi'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

$\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$



Άρα η ϕ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, οπότε η ϕ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o = 1$, το οποίο είναι το:

$$\phi_{\max} = \phi(1) = 0$$

Επομένως για κάθε $x \in R$ ισχύει $\phi(x) \le \phi_{\max} = 0$ και συνεπώς:

$$2\int_1^x f(t)dt - (x-1)^2 \le 0 \Rightarrow 2\int_1^x f(t)dt \le (x-1)^2$$

13. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(f(a) + f(x)\right), \quad x \in R$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$h'(x) = \frac{1}{2}\left(f'\left(\frac{a+x}{2}\right) - f'(x)\right)$$

Έχουμε:

- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f'\left(\frac{a+x}{2}\right) > f'(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{a+x}{2} < x, \left(f' \downarrow R, f\,(\kappa o\acute{\iota}\lambda\eta)\right)$$

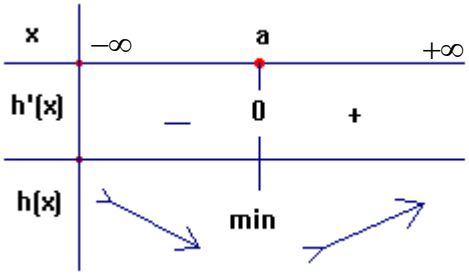
$$\Leftrightarrow x > a$$

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΣ

- $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x < a$
- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$

$...h \downarrow (-\infty, a,]\ , h \uparrow [a, +\infty)$

$...h_{\min} = h(a) = ... = 0$



Άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει :

$$h(x) \geq h_{\min} \Leftrightarrow f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(f(a) + f(x)\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{a+x}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(x)}{2}.$$

Επομένως:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \quad \forall a,b \in R$$

14. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (η) της C_f στο σημείο της $N(\xi, f(\xi))$, είναι

$$\lambda_\eta = f'(\xi).$$

Για να είναι η (η) παράλληλη (με την ευρεία σημασία) προς την

$$\text{ευθεία } (\delta): y = \frac{1}{2}x + 2011,$$

πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\lambda_\eta = \lambda_\delta$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{f(\xi)}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + e^{f(\xi)} = 2 \Leftrightarrow e^{f(\xi)} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{f(\xi)} = e^0 \overset{(e^x \text{ '1-1'})}{\Leftrightarrow} f(\xi) = 0$$

$$\overset{(f(1)=0)}{\Leftrightarrow} f(\xi) = f(1)$$

$$\Leftrightarrow \xi = 1 \left(f \text{ '1-1', } \omega\varsigma\ \gamma\nu.\ \mu o\nu\acute{o}\tau o\nu\eta\right)$$

Είναι:

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = \frac{1}{1+e^{f(1)}} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$$

και η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$$

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

15. Στο $+\infty$ έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-0x\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

Άρα στο $+\infty$ η C_f δεν έχει ασύμπτωτη.

Στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(e^{f(x)}+f(x)\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-e^{f(x)}\right)\underset{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\right)}{\overset{(u=f(x))}{=}}-\lim_{u\to-\infty}e^{u}=-0=0.$$

Άρα η ευθεία $(\zeta): y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

16. Για τη συνάρτηση f ισχύουν τα ακόλουθα:

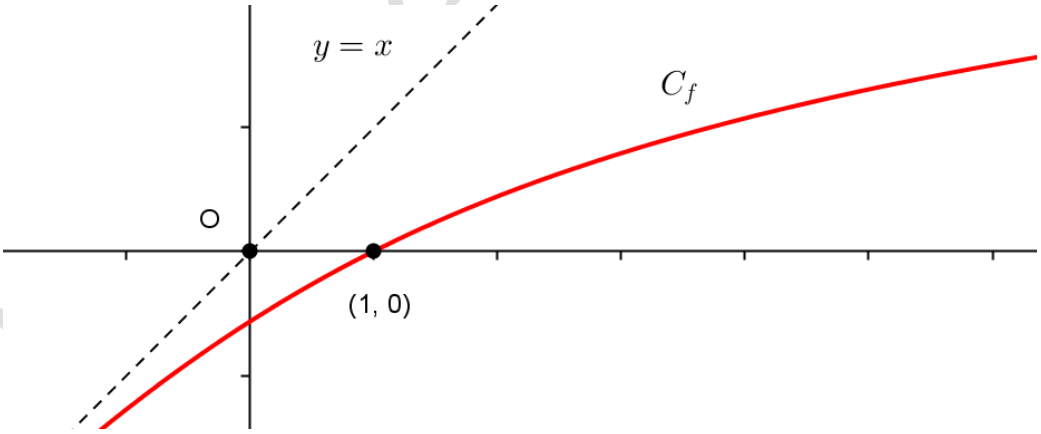
Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Η f είναι κοίλη στο R

Η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$$f(1)=0$$

Έτσι μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



17. <u>1ος τρόπος:</u>

$$e^{f(x)}+f(x)=x\Rightarrow\left(e^{f(x)}+f(x)\right)f'(x)=xf'(x)$$

$$\Rightarrow e^{f(x)}f'(x)+f(x)f'(x)=xf'(x)$$

$$\underset{\text{συνεχής}}{\overset{f'}{\Rightarrow}}\int_0^1\left(e^{f(x)}f'(x)+f(x)f'(x)\right)dx=\int_0^1 xf'(x)dx\Rightarrow$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(e^{f(x)}\right)' dx + \int_0^1 f(x) f'(x) dx = \left[x f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 (x)' f(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[e^{f(x)}\right]_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} f^2(x)\right)' dx = 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) - \int_0^1 f(x) dx$$

$$\Rightarrow e^{f(1)} - e^{f(0)} + \frac{1}{2} f^2(1) - \frac{1}{2} f^2(0) = 0 - 0 - \int_0^1 f(x) dx$$

$$\Rightarrow e^0 - e^{f(0)} + \frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{2} f^2(0) = -\int_0^1 f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} f^2(0) + e^{f(0)} - 1 \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} f^2(0) - f(0) - 1$$

$$\boxed{(*) \quad \left(e^{f(x)} + f(x) = x, \forall x \in R\right) \overset{(x=0)}{\Rightarrow} e^{f(0)} + f(0) = 0 \Rightarrow e^{f(0)} = -f(0)}$$

<u>2ος τρόπος :</u>

Θέτουμε $u = f(x)$, οπότε είναι:

$$x = f^{-1}(u) = e^u + u \text{ και } dx = \left(e^u + 1\right) du$$

Για $x = 0$ είναι $u = f(0)$

Για $x = 1$ είναι $u = f(1) = 0$

Άρα:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{f(0)}^0 u\left(e^u + 1\right) du =$$

$$= \int_{f(0)}^0 u\left(e^u + u\right)' du = \left[u\left(e^u + u\right)\right]_{f(0)}^0 - \int_{f(0)}^0 (u)'\left(e^u + u\right) du =$$

$$= 0 - f(0)\left(e^{f(0)} + f(0)\right) - \int_{f(0)}^0 \left(e^u + u\right) du \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} -f(0) \cdot 0 - \left[e^u + \frac{u^2}{2}\right]_{f(0)}^0 = -\left(e^0 + \frac{0^2}{2}\right) + \left(e^{f(0)} + \frac{f^2(0)}{2}\right) =$$

$$= e^{f(0)} + \frac{f^2(0)}{2} - 1 \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} f^2(0) - f(0) - 1$$

18. Είναι:

$$E = \int_1^{1+e} \left|f(x) - x\right| dx \overset{\left(f(x) - x = e^{f(x)}\right)}{=} \int_1^{1+e} e^{f(x)} dx$$

Θέτουμε $u = f(x)$, οπότε είναι $x = f^{-1}(u) = e^u + u$ και $dx = \left(e^u + 1\right) du$

Για $x = 1$ έχουμε $u = f(1) = 0$

Για $x = 1 + e$ έχουμε $u = f(1+e) = f\left(e^1 + 1\right) \overset{(**)}{=} 1$

$$\boxed{(**) \quad f\left(e^x + x\right) = x, \quad \forall x \in R}$$

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

Άρα:

$$E=\int_0^1 e^u\left(e^u+1\right)du=\int_0^1\left(e^{2u}+e^u\right)du=$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2u}+e^u\right]_0^1=\frac{1}{2}e^2+e-\frac{3}{2}\ \ \tau.\mu.$$

19. Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$f(x)+e^{f(x)}=x\Rightarrow x-f(x)=e^{f(x)}>0$$

$$\Rightarrow x-f(x)>0\Rightarrow f(x)<x.$$

20. Για κάθε $x>1$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[1,x]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(1,x)$, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)-0}{x-1}=\frac{f(x)}{x-1}:(a)$$

Όμως, έχουμε:

$$1<\xi<x\Rightarrow f'(1)>f'(\xi)>f'(x):(b)$$

διότι $f'\downarrow R$, (αφού η f είναι κοίλη στο R).

Από τις (a),(b) προκύπτει:

$$\frac{1}{1+e^{f(1)}}>\frac{f(x)}{x-1}>f'(x)$$

$$\overset{(x-1>0)}{\Rightarrow}(x-1)f'(x)<f(x)<\frac{x-1}{1+e^{f(1)}}=\frac{x-1}{1+e^0}=\frac{x-1}{2}$$

$$\Rightarrow(x-1)f'(x)<f(x)<\frac{x-1}{2},\quad(x>1)$$

21. Για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)<x\quad:(\Sigma)$

Από την (Σ) θέτοντας όπου x το $f^{-1}(x)$ έχουμε ότι για κάθε $x\in f(R)=R$ ισχύει :

$$f\left(f^{-1}(x)\right)<f^{-1}(x)\Rightarrow x<f^{-1}(x):(\Sigma_1).$$

Από τις (Σ) και (Σ_1) προκύπτει ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει

$$f(x)<x<f^{-1}(x)\Rightarrow f(x)\neq f^{-1}(x).$$

Επομένως οι C_f και $C_{f^{-1}}$ δεν έχουν κοινό σημείο.

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

Χρήσιμες προτάσεις

ΘΕΜΑ 1

Αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη στο Α, τότε η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη στο $f(A)$ με ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Απόδειξη

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της Α, έπεται ότι η f είναι συνάρτηση 1-1, οπότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(A)$.

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, θα δείξουμε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Υποθέτουμε ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$, τότε θα υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ και $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. 'Εχουμε όμως

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \overset{f:\uparrow A}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) \overset{(*)}{\Rightarrow} y_1 \geq y_2$$ **άτοπο** αφού $y_1 < y_2$.

(*)(αφού $f\left(f^{-1}(y)\right) = y,\ \textit{για κάθε}\ y \in f(A)$)

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Α, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $f(A)$.

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι αν η f είναι γνησίως μονότονη στο Α, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη στο $f(A)$ με το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

ΘΕΜΑ 2

Αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο Α, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = x$.

Απόδειξη

Έστω x_0 μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$, τότε θα ισχύει $f(x_0) = f^{-1}(x_0) : (1)$.

Από της (1) προκύπτει ότι $x_0 \in A, x_0 \in f(A)$ και $f(x_0) \in A$ (αφού $f(x_0) = f^{-1}(x_0) \in A$).

Έχουμε $(1) \Rightarrow f\left(f(x_0)\right) = f\left(f^{-1}(x_0)\right) \Rightarrow f\left(f(x_0)\right) = x_0 : (2)$

Θα δείξουμε ότι $f(x_0) = x_0$

Έστω ότι $f(x_0) \neq x_0$, τότε θα είναι $f(x_0) > x_0$ ή $f(x_0) < x_0$.

Υποθέτουμε ότι $f(x_0) > x_0$, τότε θα έχουμε

$$f(x_0) > x_0 \underset{(f(x_0), x_0 \in A)}{\overset{(f:\uparrow A)}{\Rightarrow}} f\left(f(x_0)\right) > f(x_0) \overset{(2)}{\Rightarrow} x_0 > f(x_0) \Rightarrow f(x_0) < x_0,$$ ΑΤΟΠΟ,

αφού υποθέσαμε ότι $f(x_0) > x_0$.

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $f(x_0) < x_0$. Επομένως είναι $f(x_0) = x_0$, οπότε ο αριθμός x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$. Άρα κάθε ρίζα της

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$ είναι και ρίζα της εξίσωσης $f(x)=x$.

Αντιστρόφως

Έστω x_0 μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=x$, τότε θα ισχύει $f(x_0)=x_0$: (3).

Από την (3) προκύπτει ότι $x_0 \in A$ *και* $x_0 \in f(A)$ (αφού $x_0 = f(x_0) \in f(A)$).

Από την (3) έχουμε

$$f(x_0)=x_0 \Rightarrow f^{-1}(f(x_0))=f^{-1}(x_0) \Rightarrow x_0 = f^{-1}(x_0) \Rightarrow f^{-1}(x_0)=x_0 : (4)$$

Από (3) και (4) προκύπτει ότι $f(x_0)=f^{-1}(x_0)$.

Άρα ο αριθμός x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$. Επομένως κάθε ρίζα της εξίσωσης $f(x)=x$ είναι και ρίζα της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$ και $f(x)=x$ είναι ισοδύναμες.

ΘΕΜΑ 3

Αν για τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\ge g(x)$ κοντά στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε είναι και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

Απόδειξη

Επειδή είναι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ έπεται ότι ισχύει $g(x)>0$ κοντά στο x_0. Ακόμα δόθηκε ότι ισχύει $f(x)\ge g(x)$ κοντά στο x_0. Έτσι κοντά στο x_0 ισχύει

$f(x)\ge g(x)>0$, οπότε κοντά στο x_0 ισχύει: $0<\dfrac{1}{f(x)}\le\dfrac{1}{g(x)}$: (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} 0=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=0$ (αφού $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$) οπότε, λόγω της (1),

προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

Επειδή είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$ και ισχύει $\dfrac{1}{f(x)}>0$ κοντά στο x_0, έπεται ότι

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}}=+\infty$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

Σημείωση: Αν ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

ΘΕΜΑ 4

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος Δ και ισχύει $f'(x)\ge 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι αύξουσα στο Δ.

Απόδειξη

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΑΣ

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και είναι $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$, έπεται ότι η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), οπότε η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[x_1, x_2]$, άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\cdot(x_2 - x_1) : (1)$$

Είναι όμως $f'(\xi) \geq 0$ και $x_2 - x_1 > 0$ (αφού $x_1 < x_2$), οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} f'(\xi) \geq 0 \\ x_2 - x_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(\xi)\cdot(x_2 - x_1) \geq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Επομένως για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$, οπότε η f είναι αύξουσα στο Δ.

***Σημείωση**: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) \leq 0$, τότε η f είναι φθίνουσα στο διάστημα Δ.*

<u>ΘΕΜΑ 5</u>

α) Αν η συνάρτηση $f : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιττή, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 0$.

β) Να βρεθεί το $\int_{-2014}^{2014} \left(e^{\eta\mu t} + e^{-\eta\mu t}\right)\cdot\left(t^3 + t\right)dt$.

<u>Λύση</u>

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt,\ x \in [-\alpha, \alpha]$.

Είναι $g(x) = \int_{-x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} f(t)\,dt - \int_{0}^{-x} f(t)\,dt$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$, η συνάρτηση $h(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt,\ x \in [-\alpha, \alpha]$ είναι παραγωγίσιμη στο $[-\alpha, \alpha]$ με $h'(x) = f(x)$ και η συνάρτηση

$\varphi(x) = \int_{0}^{-x} f(t)\,dt = h(-x),\ x \in [-a, a]$ είναι παραγωγίσιμη στο $[-\alpha, \alpha]$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x) = f(-x)\cdot(-x)' = -f(-x)$.

Έτσι η g είναι παραγωγίσιμη στο $[-\alpha, \alpha]$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων

με $g'(x) = \left(\int_{0}^{x} f(t)\,dt - \int_{0}^{-x} f(t)\,dt\right)' = \ldots = f(x) - f(-x)\cdot(-x)' = f(x) + f(-x)$.

Επειδή η f είναι περιττή έπεται ότι ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$.

Έτσι για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$ είναι $g'(x) = f(x) + (-f(x)) = 0$, οπότε η g είναι σταθερή στο $[-\alpha, \alpha]$. Επομένως για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$ ισχύει

$$g(x) = g(0) \Leftrightarrow \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \int_{-0}^{0} f(t)\,dt \Leftrightarrow \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$$

Για x = α έχουμε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 0$.

***<u>Σημείωση</u>**: Ένας 2ος τρόπος επίλυσης είναι με αλλαγή μεταβλητής ($u = -t$).*

β) Για την συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \left(e^{\eta\mu x} + e^{-\eta\mu x}\right)\left(x^3 + x\right)$, ισχύει
Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$\varphi(-x) = \left(e^{\eta\mu(-x)} + e^{-\eta\mu(-x)}\right)\left((-x)^3 + (-x)\right)$$

$$= \left(e^{-\eta\mu x} + e^{\eta\mu x}\right)\left(-x^3 - x\right)$$

$$= -\left(e^{\eta\mu x} + e^{-\eta\mu x}\right)\left(x^3 + x\right)$$

$$= -\varphi(x),\ \textit{για κάθε}\ x \in \mathbb{R}$$

Άρα η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιττή, οπότε από το (α) ερώτημα έχουμε
$\int_{-2014}^{2014} \varphi(t)\,dt = 0$ δηλαδή $\int_{-2014}^{2014} \left(e^{\eta\mu t} + e^{-\eta\mu t}\right)\left(t^3 + t\right)dt = 0$.

<u>ΘΕΜΑ 6</u>
Αν η συνάρτηση $f : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια, τότε
$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt$.

<u>Απόδειξη</u>
Επειδή η f είναι άρτια ισχύει $f(-x) = f(x),\ \textit{για κάθε}\ x \in [-\alpha, \alpha]$: (1)

Θεωρώ την συνάρτηση $\varphi(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt - 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt,\ x \in [-\alpha, \alpha]$

Είναι:

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt - 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-x}^{0} f(t)\,dt - \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

$$= -\int_{0}^{-\chi} f(t)\,dt - \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

ΝΙΚ. ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

Έχουμε,

$$\varphi'(x) = \ldots = -f(-x)\cdot(-x)' - f(x)$$

$$= -f(-x)\cdot(-1) - f(x)$$

$$= f(-x) - f(x)$$

$$\overset{(1)}{=} f(x) - f(x) = 0,\ \textit{για κάθε}\ x \in [-a, a]$$

Άρα η φ είναι σταθερή στο $[-a, a]$, οπότε για κάθε $x \in [-a, a]$ ισχύει

$$\varphi(x) = \varphi(0) \Leftrightarrow \int_{-x}^{x} f(t)\,dt - 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{-0}^{0} f(t)\,dt - 2\int_{0}^{0} f(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{-x}^{x} f(t)\,dt - 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

Για $x = \alpha$ έχουμε: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt$.

Σημείωση: *2ος τρόπος* $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = \int_{-\alpha}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt$ *και για το* $\int_{-\alpha}^{0} f(t)\,dt$ *αλλαγή μεταβλητής* $(u = -t)$.

<u>ΘΕΜΑ 7</u>

Αν η συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα, είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = 0$ με $\alpha, \beta \in \Delta$, τότε είναι α = β.

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = \int_{\gamma}^{x} f(t)\,dt,\ \ x \in \Delta$ ($\gamma \in \Delta$, σταθερό σημείο του Δ).

Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ έπεται ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο Δ με

$$g'(x) = f(x),\ \text{για κάθε}\ x \in \Delta.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ κα ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ έπεται ότι η f διατηρεί στο Δ σταθερό πρόσημο, οπότε θα είναι f(x) > 0 για κάθε $x \in \Delta$ ή f(x)<0 για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή θα είναι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ή $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Επομένως η g θα είναι γνησίως αύξουσα στο Δ ή γνησίως φθίνουσα στο Δ. Έτσι η g, ως γνησίως μονότονη στο Δ, είναι συνάρτηση 1 – 1.

Έχουμε,

ΝΙΚΟΛΑΪΤΑΡΙΔΗΣ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\gamma} f(t)dt + \int_{\gamma}^{\beta} f(t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow -\int_{\gamma}^{\alpha} f(t)dt + \int_{\gamma}^{\beta} f(t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma}^{\beta} f(t)dt = \int_{\gamma}^{\alpha} f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow g(\beta) = g(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \beta = \alpha \qquad (\textit{γιατί η g είναι συνάρτηση } 1-1)$$

Άρα είναι α = β.

ΘΕΜΑ 8

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$

Απόδειξη

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x \in [\alpha, \beta]$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β] έπεται ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] με $g'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, οπότε η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο [α, β] (αφού η g είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β)).
Επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - \int_{\alpha}^{a} f(t)dt}{\beta - \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - 0 = (\beta - \alpha) f(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = (\beta - \alpha) f(\xi)$$

ΘΕΜΑ 9

Αν οι συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και ισχύει $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

Απόδειξη

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x),\ x \in [\alpha, \beta]$.

Η h είναι συνεχής στο [α ,β], ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Ακόμα για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0$.

Επειδή η h είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ έπεται ότι

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΑΝΗΣ

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x) - g(x) \right) dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

<u>Βασικές ανισότητες</u>

1) $|\eta\mu x| \leq |x|,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν x = 0)

2) $e^x \geq x+1$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν x = 0)

3) $\ln x \leq x-1,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x > 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν x = 1)

4) $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta},\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \alpha, \beta \geq 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν α = β)

5) $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \alpha > 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν a = 1)

6) Αν $m \leq f(x) \leq M,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in \Delta$ τότε

$$\left(f(x) - m \right)\left(f(x) - M \right) \leq 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow f^2(x) - (m+M) f(x) + m \cdot M \leq 0\ \ldots$$

<u>ΘΕΜΑ 10</u>

Αν η συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ (Δ: διάστημα) είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι συνάρτηση 1 – 1 .

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι η f **ΔΕΝ** είναι συνάρτηση 1 – 1, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$ έπεται ότι η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη (x_1, x_2).

Ακόμη είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$, ΑΤΟΠΟ, αφού δόθηκε ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Επομένως η f είναι συνάρτηση 1 – 1.

<u>ΘΕΜΑ 11</u>

Αν η συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ (Δ: διάστημα) είναι συνεχής και 1 – 1, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι η f **ΔΕΝ** είναι γνησίως μονότονη στο Δ, τότε δεδομένου ότι η f είναι συνάρτηση 1 -1, θα υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 < x_3$ και

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

$$\acute{\eta}$$

$$f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$$

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

$$\acute{\eta}$$

$$f(x_3) > f(x_1) > f(x_2)$$

$$\acute{\eta}$$

$$f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$$

Έστω $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και ισχύει $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ έπεται, λόγω του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών, ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $f(\xi) = f(x_3)$ και επειδή η f είναι 1 -1 προκύπτει ότι $\xi = x_3$, ΑΤΟΠΟ, αφού $x_1 < \xi < x_2 < x_3$.

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε και στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Επομένως η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

ΘΕΜΑ 12

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και εξίσωση f (x) = 0 έχει ν διαφορετικές ρίζες $(\nu \geq 2)$ στο Δ, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον (ν – 1) ρίζες στο Δ.

Απόδειξη

Έστω $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu \in \Delta$ με $\rho_1 < \rho_2 < ... < \rho_{\nu-1} < \rho_\nu$ οι ν στο πλήθος ρίζες της εξίσωσης f (x) = 0.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ έπεται ότι η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], ..., [\rho_{\nu-1}, \rho_\nu]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), ..., (\rho_{\nu-1}, \rho_\nu)$.

Ακόμη είναι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = ... = f(\rho_{\nu-1}) = f(\rho_\nu) = 0$, αφού οι αριθμοί $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης f (x) = 0.

Άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], ..., [\rho_{\nu-1}, \rho_\nu]$.

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2), \xi_2 \in (\rho_2, \rho_3), ..., \xi_{\nu-1} \in (\rho_{\nu-1}, \rho_\nu)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = 0,\ f'(\xi_2) = 0, ...,\ f'(\xi_{\nu-1}) = 0,$$

οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον (ν -1) ρίζες στο διάστημα Δ.

ΘΕΜΑ 13

Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύουν:

1. $|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w}) = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(\overline{z} \cdot w)$
2. $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$
3. $|z + w|^2 - |z - w|^2 = 4\,\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w}) = 4\,\mathrm{Re}(\overline{z} \cdot w)$

Απόδειξη

1. Έχουμε,

$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 + (z\overline{w} + \overline{z}w)$$

οπότε

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + \left(z \cdot \overline{w} + \overline{(z \cdot \overline{w})}\right) = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w}) \text{ και}$$

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + \left(\overline{z} \cdot w + \overline{(\overline{z} \cdot w)}\right) = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z} \cdot w)$$

2. Έχουμε,

$$|z+w|^2+|z-w|^2=(z+w)\overline{(z+w)}+(z-w)\overline{(z-w)}$$

$$=(z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)+(z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)$$

$$=z\cdot\overline{z}+\cancel{z\cdot\overline{w}}+\cancel{w\cdot\overline{z}}+w\cdot\overline{w}+z\cdot\overline{z}-\cancel{z\cdot\overline{w}}-\cancel{w\cdot\overline{z}}+w\cdot\overline{w}$$

$$=|z|^2+|w|^2+|z|^2+|w|^2$$

$$=2|z|^2+2|w|^2$$

3. Έχουμε,

$$|z+w|^2-|z-w|^2==(z+w)\overline{(z+w)}-(z-w)\overline{(z-w)}$$

$$=(z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)-(z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)$$

$$=\cancel{z\cdot\overline{z}}+z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{z}+\cancel{w\cdot\overline{w}}-\cancel{z\cdot\overline{z}}+z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{z}-\cancel{w\cdot\overline{w}}$$

$$=2\left(z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w\right)$$

$$=2\left(z\cdot\overline{w}+\overline{\left(z\cdot\overline{w}\right)}\right)$$

$$=2\cdot\left(2\,\mathrm{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)\right)$$

$$=4\,\mathrm{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)$$

Ακόμη είναι $\mathrm{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=\mathrm{Re}\left(\overline{z\cdot\overline{w}}\right)=\mathrm{Re}\left(\overline{z}\cdot w\right)$.

Έτσι έχουμε

$$|z+w|^2-|z-w|^2=4\,\mathrm{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=4\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}\cdot w\right)\ .$$

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

Ασκήσεις για λύση

1. Για τη συνάρτηση: $f:R\to R$ ισχύει:

$$f(x-y)>f(x+y),\text{ για κάθε } x,y\in R \text{ με } y>0.$$

Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

2. Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει:

$$x(f(x))^3+y(f(y))^3<x(f(y))^3+y(f(x))^3,\text{ για κάθε } x,y\in R \text{ με } x\neq y.$$

Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία .

3. Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει:

$$|f(x)-f(y)-x+y|\le|x-y|,\text{ για κάθε } x,y\in R.$$

Να δειχθεί ότι:

Α) η f είναι συνεχής στο R.

Β) η συνάρτηση $g(x)=f(x)-3x,\ x\in R$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Γ) αν επιπλέον ισχύει:

$$f(f(x))+3x=4f(x),\text{ για κάθε } x\in R$$

να δειχθεί ότι:

$$f(x)=x,\ x\in R.$$

4. Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει:

$$(f(x))^3-2(f(x))^2+2f(x)=2e^x-x^2,\text{ για κάθε } x\in R.$$

Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και να συγκριθεί το $f(e^x)$ με το $f(x),(x\in R)$.

5. Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\text{ για κάθε } x,y\in R.$$

Να δειχθεί ότι:

Α) $f(x-y)=f(x)-f(y)$, για κάθε $x,y\in R$.

Β) αν για κάθε $x>0$ ισχύει: $f(x)<0$,τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R και να λυθεί στη συνέχεια η ανίσωση:

$$f(e^{x-1})+2f\left(\frac{x}{2}\right)>2f(1).$$

6. Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει: $f(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in R$.

Α) Να δειχθεί ότι

i) η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii) $f(R)=(0,+\infty)$

Β) Να οριστεί η αντίστροφη συνάρτηση της f.

7. Για τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ ισχύει:

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

$$f(\lambda x) > f\left(\frac{x}{\lambda}\right), \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και για κάθε } \lambda > 1.$$

Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

8. Για τη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$ ισχύει:

$$f(xy) = f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y > 0$$

και η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση.

A) Να δειχθεί ότι:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$.

ii) $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$.

iii) $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε $x, y > 0$.

B) Αν για κάθε $x > 1$ ισχύει $f(x) < 1$, τότε:

i) Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii) Να λυθεί η ανίσωση:

$$(f(x))^3 < f(7x-6)$$

9. Για τη συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει:

$$f(e^x + x) = x^3 - x^2 + x, \text{ για κάθε } x \in R.$$

Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

10. Για τη συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει:

$$|f(x+y) - f(x) - 2y| < |y|, \text{ για κάθε } x, y \in R \text{ με } y \neq 0.$$

A) Να δειχθεί ότι:

i) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii) Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x, x \in R$ είναι γν. αύξουσα στο R.

iii) Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - 3x, x \in R$ είναι γν. φθίνουσα στο R.

B) Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(2x+1) + 2f(x+2) = 3f(3x).$$

11. A) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x - \ln(x^2+1), x \in R.$$

B) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\ln\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+1}\right) = 4x+2, \quad x \in R.$$

12. A) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x^2 - x, \quad x \in R$$

B) Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in R$, ώστε:

$$e^{\alpha+\beta-2} + e^{\alpha-\beta} + (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 + 4 = 6\alpha + 4\beta.$$

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

13. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}},\quad x>0.$$

i) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$30^{\sqrt[3]{31}},\quad 31^{\sqrt[3]{30}}$$

iii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$e^{k\sqrt[3]{x}}=x,\quad (x>0)$,για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου k.

iv) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e^3$.

v) Να βρεθούν οι $\alpha,\beta>0$, ώστε:

$$\alpha^{\sqrt[3]{\beta}}\beta^{\sqrt[3]{\alpha}}=e^{\frac{6\sqrt[3]{\alpha\beta}}{e}}$$

14. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

i) Να δειχθεί ότι $D_f=R$

ii) Να δειχθεί ότι η f είναι γν. αύξουσα στο R

iii) Να δειχθεί ότι η f είναι περιττή

iv) Να λυθεί η εξίσωση: $f\left(2x^2\right)+f\left(x-6\right)=0,\quad x\in R$

v) Να οριστεί η αντίστροφη συνάρτηση της f

vi) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα των $x'x$ και την ευθεία $x=1$

vii) Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f\left(e^x\right)-f\left(5^{-x}\right)>f\left(2^x\right)-f\left(3^{-x}\right)$$

15. Α) Να δείξετε ότι: $x^6\geq 6x-5$, για κάθε $x\in R$

Β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $\int_0^1 f(x)dx=1$, τότε να δείξετε ότι: $\int_0^1 \left(f(x)\right)^6 dx\geq 1$

Γ) Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ να δείξετε ότι:

i) $\frac{\alpha^6}{\beta^5}+\frac{\beta^6}{\gamma^5}+\frac{\gamma^6}{\alpha^5}\geq\alpha+\beta+\gamma$

ii) $\frac{\alpha^5}{\beta^6}+\frac{\beta^5}{\gamma^6}+\frac{\gamma^5}{\alpha^6}\geq\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$

Δ) Αν $x,y,\omega\in R$ και ισχύει: $x^6+64y^6+\omega^6=6x+12y-6\omega-15$ να βρεθούν οι x,y,ω.

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

16. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x^3e^{1-x}, \quad x\in R$

A) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

B) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3-\lambda e^{x-1}=0$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in R$.

17. Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνησίως αύξουσα, παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$\left|f'(x)-f'(y)-x+y\right|<\left|x-y\right| \text{ για κάθε } x,y\in R \text{ με } x\neq y.$$

Ακόμα είναι: $f(1)=1$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-1}{x-1}, & \alpha\nu\ x\neq 1\\ f'(1), & \alpha\nu\ x=1\end{cases}$$

i) Να δειχθεί ότι η f είναι κυρτή στο R

ii) Να δειχθεί ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο R

iii) Να λυθεί στο R η εξίσωση: $f\left(x^3\right)+x^2+x=\left(x^2+x+1\right)f(x)$

iv) Να δειχθεί ότι για κάθε $x>1$ ισχύει: $f(x)+xf\left(\dfrac{1}{x}\right)>x+1$

v) Να δειχθεί ότι για κάθε $\alpha,\beta\in(1,+\infty)$ με $\alpha<\beta$ ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x)-1}{f\left(x^2\right)-1}dx<\ln\left(\frac{\beta+1}{\alpha+1}\right)$$

18. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει $f(0)<f'(x)<f(1)$ για κάθε $x\in R$.

i) Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο R.

ii) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

iii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

iv) Να δειχθεί ότι:

$$\int_{x}^{2x-1}f(t)\,dt\geq\int_{1}^{x}f(t)dt, \text{ για κάθε } x\in R$$

19. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς της μορφής $z=x^2+(x-3)i, \quad x\in R$ έχει το μικρότερο μέτρο.

20. A) Να δειχθεί ότι κάθε μιγαδικός της μορφής: $z=x+\left(x^8-8x+8\right)i, \quad x\in R$ δεν είναι πραγματικός αριθμός.

B) Να δειχθεί ότι η εικόνα κάθε μιγαδικού αριθμού της μορφής:

$$z=x+\left(x^4-3x+3\right)i, \quad x\in R$$

ανήκει στο ημιεπίπεδο: $y\geq x$.

21. Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη, κυρτή στο R και ισχύει:

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

Να δειχθεί ότι:

i) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

ii) $f(R)=(0,+\infty)$

iii) $\int_0^x f(t)dt > xf(x)$, για κάθε $x\neq 0$.

22. Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο R .

A) Να δειχθεί ότι:

i) $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, για κάθε $\alpha,\beta\in R$

ii) $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\geq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$, για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in R$

iii) $f(x)+f(\alpha-x)\geq 2f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, για κάθε $\alpha,x\in R$

iv) $\int_0^\alpha f(x)dx > \alpha f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, για κάθε $\alpha>0$

B) Αν $\alpha<\beta$ να δείξετε ότι:

i) $f(x)\leq \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

ii) $\int_\alpha^\beta f(x)dx < \frac{\beta-\alpha}{2}\left(f(\alpha)+f(\beta)\right)$.

23. Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη, κυρτή στο R και υπάρχουν $\alpha,\beta,\gamma\in R$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ώστε:

$$(\gamma-\beta)\int_\alpha^\beta f(t)dt=(\beta-\alpha)\int_\beta^\gamma f(t)dt.$$

Να δειχθεί ότι:

i) Η f δεν είναι συνάρτηση $1-1$

ii) Η f έχει ολικό ελάχιστο.

24. Για την δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει:

$$f(f(x))=x-2 \text{ για κάθε } x\in R \text{ και } f(1)=0.$$

i) Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii) Να δειχθεί ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(-1,1)$ $\mu\varepsilon$ $x_1\neq x_2$ τέτοια, ώστε:

$$\left(f'(x_1)\right)^2\left(f'(x_2)\right)^3=1.$$

iii) Αν επιπλέον ισχύει: $f(x+1)=f(x)+1$, για κάθε $x\in R$, τότε να δειχθεί ότι: $f(x)=x-1$.

25. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει:

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

$$\left(f(x)\right)^3+\alpha\left(f(x)\right)^2+\beta f(x)=e^{x-1}+e^{1-x}\text{, για κάθε } x\in R$$

όπου $\alpha,\beta\in R$ με $\alpha^2<2\beta$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

26. Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R.

i) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}, & \alpha\nu\ x\neq 0\\ f(0), & \alpha\nu\ x=0\end{cases}$$

Είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii) Να δειχθεί ότι: $\int_0^{100} f(t)dt>100\int_0^1 f(t)dt$.

27. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ ισχύει:

$$e^{f'(x)}+f(x)=e^{2x}+x^2\text{, για κάθε } x\geq 0 \text{ και είναι } f(0)=0.$$

Τότε να δειχθεί ότι: $f(x)=x^2$, για κάθε $x\geq 0$.

(Βασίλης Μαυροφρύδης)

28. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει:

$$x\left(f(x)-\int_0^1 f(xt)\,dt\right)=e^x-x-1\text{, για κάθε } x\in R$$

και η f' είναι συνεχής στο $x_o=0$.

i) Να βρεθεί η $f'(x)$

ii) Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

iii) Να δειχθεί ότι: $\int_0^2 f(t)dt<\int_1^3 f(t)dt$.

iv) Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα.

v) Να δειχθεί ότι: $\int_0^1 f(t)dt>\dfrac{1}{2}+f(0)$

29. Για την δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει:

$$xf''(x)+2f'(x)+xf(x)=0\text{, για κάθε } x\in R \text{ και } f(0)=1.$$

i) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=\left(xf(x)-\eta\mu x\right)^2+\left(xf'(x)+f(x)-\sigma\upsilon\nu x\right)^2,\quad x\in R$$

είναι σταθερή στο R.

ii) Να βρεθεί ο τύπος της f.

iii) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία στο $[0,\pi]$.

(Βασίλης Μαυροφρύδης)

30. Για την δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει:

$$f(-1)=f(1)=1,\quad f(0)=0,\quad f'(1)=2$$

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΑΗΣ

και η f'' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο R.

i) Να δειχθεί ότι η f είναι κυρτή στο R.

ii) Να δειχθεί ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σ' ένα μόνο σημείο $x_o \in R$

iii) Αν για το x_o ισχύει:

$$\int_0^{x_0} xf''(x)\,dx = f(x_0),$$

τότε να δειχθεί ότι $x_0 = 0$.

iv) Να δειχθεί ότι:

α) $f(x) \le -x$, για κάθε $x \in [-1,0]$

β) $f(x) \le x$, για κάθε $x \in [0,1]$

γ) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx < 1$

δ) $f(x) \ge 2x-1$, για κάθε $x \in R$

ε) $\int_{1}^{2} f(x)\,dx > 2$

v) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $f(x^3)+f(x^2)=2(x^3+x^2-1), \quad x \in R$

β) $f(x-1)+f(y+2)=2(x+y), \quad x,y \in R$

31. Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $z^4 - 4\bar{z} + \lambda = 0$, όπου $\lambda \in (3,+\infty)$, να δειχθεί ότι: $z \notin R$.

32. Α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση:

$$f(x) = (x-1)^2 \ln x + \sqrt{x}, \quad x > 0.$$

Β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

Γ) Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x)+f(x^2)+f(x^3)+\ldots+f(x^\nu) = \nu f(x^{\nu+1}), \quad x > 0$$

όπου $\nu \in N^*$

33. Για τη συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει:

$$f'(x) = (x-1)^{11}(x-3)^{11}(x-5)^{11}, \quad x \in R$$

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να δειχθεί ότι $f(1) = f(5)$.

34. Να δειχθεί ότι:

i) $e^x \ge x^e, \quad \forall x > 0$

ii) $x^x \ge e^{2x-e}, \quad \forall x > 0$

iii) $e^x \ge 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}, \quad \forall x \in R$.

ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

35. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda \in R$ ώστε να ισχύει:

$$e^{\lambda x} \geq x \text{, για κάθε } x \in R$$

36.Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ ισχύει:

$$f'(x) > 5x^4 \text{, για κάθε } x \in R$$

i) Να βρεθούν τα όρια:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

ii) Να βρεθεί το $f(R)$

37. Για τη συνάρτηση $f : R \to R$ ισχύει:

$$e^{f'(x)} - f'(x)e^{2x} = (1-2x)e^{2x}$$

για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 1$.

i) Να δειχθεί ότι: $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in R$

ii) Να δειχθεί ότι: $f(x) = x^2 + 1, \quad x \in R$

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f με θετική κλίση και η οποία διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία (ε)

38. Για τη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to R$ ισχύει:

$$e^{f'(x)} + f'(x) + f(x) = x + e + 1,$$

για κάθε $x \geq 0$ και $f(0) = 0$.

Να δειχθεί ότι: $f(x) = x, \quad \forall x \geq 0$

39. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{F}(\mathrm{k}) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{k}\sigma\upsilon\nu^2 \mathrm{x}}} \mathrm{dx}$

A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της F

B) Να αποδειχθεί ότι η F είναι γνησίως αύξουσα.

Berkeley Problems in Mathematics

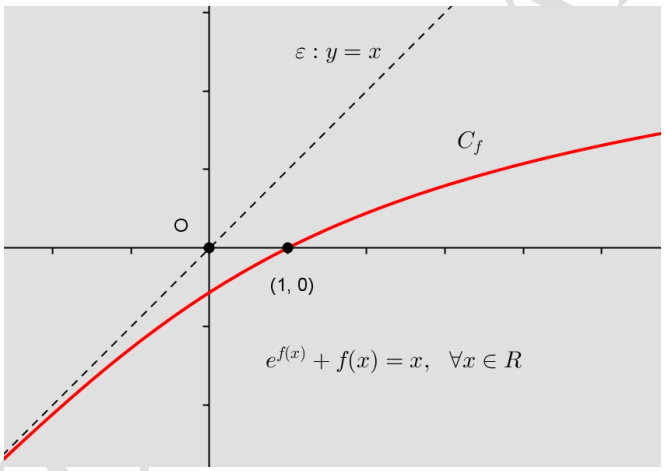
ΝΙΚΟΣ ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

Περιεχόμενα:

1.Γενικό Θέμα Ανάλυσης……Σελ. 3

2. Χρήσιμες Προτάσεις……Σελ.12

3. Ασκήσεις για λύση……Σελ.21



ΝΙΚΟΛΑΡΙΔΗΣ