Από τους φροντιστές καθηγητές Μαθηματικών

Γιάννη Απλακίδη και Νίκο Ζανταρίδη

Master Class 5 Μαθηματικών

5η περίοδος 2014-2015

περιεχόμενα

1. ‘’Επίλυση εξισώσεων - ανισώσεων και απόδειξη ανισοτήτων’’
   του Νίκου Ζανταρίδη

2. Διαγώνισμα Επαναληπτικό στα Μαθηματικά Γ’ Κατεύθυνσης (θέματα)

3. ‘’Τελικά το ξ του ΘΜΤ βρίσκεται πλησιέστερα στο α ή στο β;’’
   μια πρόταση του Νίκου Ζανταρίδη

4. Διαγώνισμα Επαναληπτικό στα Μαθηματικά Γ’ Κατεύθυνσης (λύσεις)

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ – ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Με τη βοήθεια

1) Του ΘΜΤ.
2) Της μονοτονίας συνάρτησης.
3) Των ακροτάτων συνάρτησης .
4) Της κυρτότητας συνάρτησης.
5) Του προσήμου συνεχούς και μη μηδενιζόμενης συνάρτησης σε διάστημα .

ΘΕΜΑ Ι.

Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

$$f(2x) > f(x) + xf'(x) \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

ΛΥΣΗ

Έστω $x > 0$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[x, 2x]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x, 2x)$, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \frac{f(2x) - f(x)}{x} : (1)$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$0 < x < \xi < 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \overset{(f' \nearrow \mathbb{R})}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} f'(x) < \frac{f(2x) - f(x)}{x} \Rightarrow$$

$$\overset{(x>0)}{\Rightarrow} x \cdot f'(x) < f(2x) - f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2x) > f(x) + xf'(x).$$

Έστω $x < 0$.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Η f ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **ΘΜΤ** στο $[2x, x]$, οπότε υπάρχει

$$\theta \in (2x, x), \text{ ώστε } f'(\theta) = \frac{f(x) - f(2x)}{x - 2x} = \frac{f(2x) - f(x)}{x} : (2)$$

Έχουμε :

$$\begin{aligned} & 2x < \theta < x < 0 \Rightarrow f'(\theta) < f'(x) \overset{(f\nearrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} \\ & \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{f(2x) - f(x)}{x} < f'(x) \Rightarrow \\ & \overset{(x<0)}{\Rightarrow} f(2x) - f(x) > xf'(x) \Rightarrow \\ & \Rightarrow f(2x) > f(x) + xf'(x). \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$f(2x) > f(x) + xf'(x).$$

ΘΕΜΑ ΙΙ.

Η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x\left(f'(x) + f'(2x)\right) < f(3x) - f(x) < x\left(f'(2x) + f'(3x)\right)$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και κυρτή, έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Έστω $x > 0$.

Η f, ως παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** σε καθένα από τα διαστήματα $[x, 2x]$, $[2x, 3x]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x, 2x)$, $\xi_2 \in (2x, 3x)$.

Τέτοιοι ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \frac{f(2x) - f(x)}{x} \quad : (a)$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

και $\quad f'(\xi_2) = \dfrac{f(3x) - f(2x)}{3x - 2x} = \dfrac{f(3x) - f(2x)}{x}$: (β)

Έχουμε:

$$\begin{cases} 0 < x < \xi_1 < 2x \\ 0 < 2x < \xi_2 < 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < f'(\xi_1) < f'(2x) \\ f'(2x) < f'(\xi_2) < f'(3x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) + f'(2x) < f'(\xi_1) + f'(\xi_2) < f'(2x) + f'(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) + f'(2x) < \frac{f(2x) - f(x)}{x} + \frac{f(3x) - f(2x)}{x} < f'(2x) + f'(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) + f'(2x) < \frac{f(3x) - f(x)}{x} < f'(2x) + f'(3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(f'(x) + f'(2x)\right) < f(3x) - f(x) < x\left(f'(2x) + f'(3x)\right).$$

ΘΕΜΑ ΙΙΙ.

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = e^{x^3} + e^{-x^3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι:

1. Η f είναι περιττή.
2. $f(x) > 2x$, για κάθε $x > 0$.
3. Να βρεθεί το $f(\mathbb{R})$.
4. $|f(\alpha) - f(\beta)| \geq 2|\alpha - \beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = e^{x^3} + e^{-x^3}$: (1)

Από τη (1) θέτοντας όπου x το $-x$ έχουμε:

$$f'(-x) = e^{(-x)^3} + e^{-(-x)^3} = e^{-x^3} + e^{x^3} = e^{x^3} + e^{-x^3}$$

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = f'(-x) \Leftrightarrow f'(x) = -f'(-x)(-x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)\right)' = \left(-f(-x)\right)' \Leftrightarrow f(x) = -f(-x) + c \ , \ (c \in \mathbb{R})$$

Για $x = 0$ έχουμε:

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

$$f(0) = -f(-0) + c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c = 2f(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = -f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

Έτσι για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$ ισχύει $-x \in D_f$ και $f(-x) = -f(x)$, οπότε η f είναι περιττή.

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$.

Είναι

$$g'(x) = f'(x) - 2 =$$
$$= e^{x^3} + e^{-x^3} - 2 =$$
$$= e^{x^3} + \frac{1}{e^{x^3}} - 2 = \frac{e^{2x^3} - 2e^{x^3} + 1}{e^{x^3}} = \frac{\left(e^{x^3} - 1\right)^2}{e^{x^3}} \geq 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν

$$e^{x^3} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x^3} = e^0 \overset{(e^x \text{ "1-1"})}{\Leftrightarrow} x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$$g(x) > g(0) \Rightarrow f(x) - 2x > f(0) - 2 \cdot 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) - 2x > f(0) = 0 \Rightarrow f(x) > 2x$$

3. Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 2x > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{2x}$: (α)

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$, οπότε λόγω της (α) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

ΖΑΝΤΑΡΙΑΣ ΝΙΚΟΣ

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ και για κάθε $x>0$ είναι $\dfrac{1}{f(x)}>0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)}=+\infty$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

- Ακόμη $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\overset{(f\ \text{περιττή})}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-f(-x)\right)\underset{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\right)}{\overset{(\omega=-x)}{=}}\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(-f(\omega)\right)=-\infty$

  (αφού $\lim\limits_{\omega\to+\infty}f(\omega)=+\infty$).

- Ακόμη είναι $f'(x)=e^{x^3}+e^{-x^3}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

4. Θα δείξουμε ότι $|f(\alpha)-f(\beta)|\geq 2|\alpha-\beta|$: (1) για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Διακρίνουμε :

1) Για $\alpha=\beta$ η (1) είναι φανερό ότι ισχύει ως ισότητα .

2) Έστω $\alpha<\beta$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[\alpha,\beta]$, οπότε υπάρχει

$\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Έχουμε:

$$\left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|=|f'(\xi)|=\left|e^{\xi^3}+e^{-\xi^3}\right|=e^{\xi^3}+e^{-\xi^3}=e^{\xi^3}+e^{-\xi^3}-2+2=$$

$$=\left(\sqrt{e^{\xi^3}}\right)^2+\left(\sqrt{e^{-\xi^3}}\right)^2-2\sqrt{e^{\xi^3}}\sqrt{e^{-\xi^3}}+2=\left(\sqrt{e^{\xi^3}}-\sqrt{e^{-\xi^3}}\right)^2+2\geq 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|\geq 2\Rightarrow\frac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{|\beta-\alpha|}\geq 2\Rightarrow|f(\beta)-f(\alpha)|\geq 2|\beta-\alpha|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|f(\alpha)-f(\beta)|\geq 2|\alpha-\beta|.$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

3) Έστω $\alpha > \beta$.

Εργαζόμενοι ομοίως, καταλήγουμε ότι και πάλι ισχύει:

$$\left| f(\alpha) - f(\beta) \right| \geq 2\left| \alpha - \beta \right|.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left| f(\alpha) - f(\beta) \right| \geq 2\left| \alpha - \beta \right|.$$

ΘΕΜΑ IV.

Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $(0, +\infty)$

Να λυθεί η εξίσωση:

$$(x+1) f(x^2) = f(x^3) + x f(x)$$

ΛΥΣΗ

- $(x+1) f(x^2) = f(x^3) + x f(x)$: (1)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $(0, +\infty)$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα $(0, +\infty)$.

- Είναι φανερό ότι ο αριθμός $x_0 = 1$ επαληθεύει την εξίσωση (1)

(Αφού για $x = 1$ η (1) δίνει

$$(1+1) f(1^2) = f(1^3) + 1 \cdot f(1) \Leftrightarrow 2f(1) = 2f(1)$$, που ισχύει).

Επομένως ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης (1).

- Έστω $x > 1$

  Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **ΘΜΤ** σε καθένα από τα διαστήματα $[x, x^2]$ και $[x^2, x^3]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x, x^2)$ και $\xi_2 \in (x^2, x^3)$,

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x}$

και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x^3) - f(x^2)}{x^3 - x^2}$.

Έχουμε όμως : $1 < x < \xi_1 < x^2 < \xi_2 < x^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \overset{(f' \nearrow (0,+\infty))}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} < \frac{f(x^3) - f(x^2)}{x^3 - x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x^2) - f(x)}{x(x-1)} < \frac{f(x^3) - f(x^2)}{x^2(x-1)} \Rightarrow$$

$$\overset{(x,x-1>0)}{\Rightarrow} x\left(f(x^2) - f(x)\right) < f(x^3) - f(x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)f(x^2) < f(x^3) + xf(x).$$

Επομένως στο $(1,+\infty)$ η εξίσωση (1) δεν έχει λύση.

- Έστω $0 < x < 1$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο καθένα από τα διαστήματα $[x^3, x^2]$, $[x^2, x]$,

οπότε υπάρχουν $\theta_1 \in (x^3, x^2)$, $\theta_2 \in (x^2, x)$

ώστε $f'(\theta_1) = \dfrac{f(x^2) - f(x^3)}{x^2 - x^3} = \dfrac{f(x^2) - f(x^3)}{x^2(1-x)}$

και $f'(\theta_2) = \dfrac{f(x) - f(x^2)}{x - x^2} = \dfrac{f(x) - f(x^2)}{x(1-x)}$.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Έχουμε όμως

$$0 < x^3 < \theta_1 < x^2 < \theta_2 < x < 1 \Rightarrow f'(\theta_1) < f'(\theta_2) \overset{(f' \nearrow (0,+\infty))}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \frac{f(x^2) - f(x^3)}{x^2(1-x)} < \frac{f(x) - f(x^2)}{x(1-x)} \overset{(x,1-x>0)}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow f(x^2) - f(x^3) < x\left(f(x) - f(x^2)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+1)f(x^2) < f(x^3) + xf(x).$$

Επομένως, στο $(0,1)$ η εξίσωση (1) δεν έχει λύση.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση

$$(x+1)f(x^2) = f(x^3) + xf(x)$$

έχει ακριβώς μια λύση στο $(0,+\infty)$, τον αριθμό $x_0 = 1$.

ΘΕΜΑ V.

Η συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}, \quad x > 0.$$

2. Να λυθεί η ανίσωση

$$(x^2 - 4x + 6) \cdot \int_0^x f(t)\,dt \geq x \cdot \int_0^{x^2-4x+6} f(t)\,dt.$$

ΛΥΣΗ

1. Είναι :

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

$$g'(x) = \ldots = \frac{xf(x) - \int_0^x f(t)\,dt}{x^2} =$$

$$= \frac{\int_0^x f(x)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt}{x^2} =$$

$$= \frac{\int_0^x \left(f(x) - f(t)\right)dt}{x^2}$$

Για κάθε $x > 0$ και για κάθε $t \in [0, x]$ ισχύει

$0 \le t \le x \overset{(f \nearrow [0,+\infty))}{\Rightarrow} f(t) \le f(x) \Rightarrow f(x) - f(t) \ge 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t = x$, οπότε

$$\int_0^x \left(f(x) - f(t)\right)dt > 0.$$

Έτσι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\frac{\int_0^x \left(f(x) - f(t)\right)dt}{x^2} > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

2. Είναι $\left(x^2 - 4x + 6\right) \cdot \int_0^x f(t)\,dt \ge x \cdot \int_0^{x^2-4x+6} f(t)\,dt$: (1) $\quad (x \ge 0)$

- Για $x = 0$ είναι φανερό ότι η (1) ισχύει ως ισότητα.
- Έστω $x > 0$, τότε είναι $x > 0$ και $x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 > 0$, οπότε έχουμε:

$$\left(x^2 - 4x + 6\right) \cdot \int_0^x f(t)\,dt \ge x \cdot \int_0^{x^2-4x+6} f(t)\,dt, \quad (x > 0) \Leftrightarrow$$

$$\underset{(x>0)}{\overset{(x^2-4x+6>0)}{\Leftrightarrow}} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} \ge \frac{\int_0^{x^2-4x+6} f(t)\,dt}{x^2 - 4x + 6}, \quad (x > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) \ge g\left(x^2 - 4x + 6\right), \quad (x > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \ge x^2 - 4x + 6, \quad (x > 0)$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \le 0 \overset{(x>0)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow x \in [2,3].$$

x	-∞		2		3		+∞
$x^2 - 5x + 6$		+	0	-	0	+	

Επομένως η (1) αληθεύει αν και μόνο αν $x \in [2,3] \cup \{0\}$.

ΘΕΜΑ VI.

Α) Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}, & x \ne 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Β) i) Αν $\alpha < \beta$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε:

$$e^{\beta-\xi} - e^{\alpha-\xi} = \beta - \alpha.$$

ii) Να εξεταστεί αν το ξ βρίσκεται πλησιέστερα στο α απ' ότι το β.

ΛΥΣΗ

Α) Για κάθε $x \ne 0$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right)' =$$
$$= \ldots = \frac{x \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

όπου $g(x) = x \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}),\ x \in \mathbb{R}$.

Είναι:

$$g'(x) = (x)' \cdot (e^x + e^{-x}) + x \cdot (e^x + e^{-x})' - (e^x - e^{-x})' =$$
$$= (e^x + e^{-x}) + x \cdot (e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) =$$
$$= x \cdot (e^x - e^{-x}).$$

ΖΑΝΤΑΡΙΑΣ ΝΙΚΟΣ

Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -x \end{cases} \overset{(e^x \nearrow)}{\Rightarrow} \begin{cases} x > 0 \\ e^x > e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ e^x - e^{-x} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\left(e^x - e^{-x}\right) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0.$$

Για κάθε $x < 0$ είναι:

$$x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < -x \end{cases} \overset{(e^x \nearrow)}{\Rightarrow} \begin{cases} x < 0 \\ e^x < e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ e^x - e^{-x} < 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \cdot \left(e^x - e^{-x}\right) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0.$$

Και $g'(0) = 0$

Έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g'(x) \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι

1) για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$g(x) > g(0) \overset{(g(0)=0)}{\Rightarrow} g(x) > 0 \Rightarrow \frac{g(x)}{x^2} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0.$$

2) για κάθε $x < 0$ ισχύει:

$$g(x) < g(0) \overset{(g(0)=0)}{\Rightarrow} g(x) < 0 \Rightarrow \frac{g(x)}{x^2} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχή στο $x_0 = 0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \overset{(0/0)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)(=2)$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επειδή ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$,

$f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$

και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ολικό ελάχιστο, το $\min f(x) = f(0) = 2$.

B) i) Η συνάρτηση $h(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = (e^x)' = e^x$, οπότε για $\alpha < \beta$ η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(\xi) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow e^{\xi} = \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{e^{\xi}} = \beta - \alpha \Rightarrow e^{\beta-\xi} - e^{\alpha-\xi} = \beta - \alpha.$$

ii) Έχουμε:

$$e^{\xi} = \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} \Rightarrow \frac{e^{\xi}}{e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} = \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\xi - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{e^{\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{-\frac{\beta-\alpha}{2}}}{\beta - \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2e^{\xi - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{e^{\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{-\frac{\beta-\alpha}{2}}}{\frac{\beta - \alpha}{2}} = f\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$$

Έχουμε:

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

$$\frac{\beta-\alpha}{2}>0 \Rightarrow f\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)>f(0) \overset{(f\nearrow[0,+\infty))}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2e^{\xi-\frac{\alpha+\beta}{2}}>2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\xi-\frac{\alpha+\beta}{2}}>1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\xi-\frac{\alpha+\beta}{2}}>e^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi-\frac{\alpha+\beta}{2}>0 \overset{(e^x\nearrow)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \xi>\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Επειδή ισχύει $\xi>\frac{\alpha+\beta}{2}$ έπεται ότι το ξ είναι πλησιέστερα στο β απ' ότι στο α.

ΘΕΜΑ VII.

Α) Να δείξετε ότι $|\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta|\le|\alpha-\beta|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu\left(\sqrt{x^4+x+1}\right)-\eta\mu\left(x^2\right)\right)$

Γ) Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $2f(x)+\eta\mu(f(x))=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

ii. Να δείξετε ότι f είναι συνεχή στο $\mathbb{R}$.

iii. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

iv. Να δείξετε ότι :

α) η f είναι 1-1.

β) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

v. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\int_{2-x}^{2x+1}f(t)\,dt>\int_{1-x}^{2x}f(t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}.$$

ΛΥΣΗ

ΖΑΝΤΑΡΙΑΣ ΝΙΚΟΣ

A) $|\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| \le |\alpha - \beta| : (1)$

Διακρίνουμε :

1) Για $\alpha = \beta$ η (1) ισχύει ως ισότητα

2) Για $\alpha < \beta$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ οπότε η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[\alpha, \beta]$.

Έτσι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\xi = \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha}\right| = |\sigma\upsilon\nu\xi| \le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha}\right| \le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha| \le |\beta - \alpha| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| \le |\alpha - \beta|.$$

3) Για $\alpha > \beta$

Εργαζόμενοι ομοίως καταλήγουμε ότι ισχύει $|\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| \le |\alpha - \beta|$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| \le |\alpha - \beta| : (m).$$

B) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$\left|\eta\mu\left(\sqrt{x^4 + x + 1}\right) - \eta\mu\left(x^2\right)\right| \overset{(m)}{\le} \left|\sqrt{x^4 + x + 1} - x^2\right| =$$

$$= \left|\frac{x^4 + x + 1 - x^4}{\sqrt{x^4 + x + 1} + x^2}\right| \overset{(x>0)}{=} \frac{x + 1}{\sqrt{x^4 + x + 1} + x^2} < \frac{x + 1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) < \eta\mu\left(\sqrt{x^4 + x + 1}\right) - \eta\mu\left(x^2\right) < \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} : (\Sigma)$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0+0=0$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]=-(0+0)=0\text{, οπότε}$$

λόγω της (Σ) προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\eta\mu\left(\sqrt{x^4+x+1}\right)-\eta\mu\left(x^2\right)\right)=0 \qquad \text{(Κριτήριο παρεμβολής)}$$

Γ) i) … $2f(x)+\eta\mu(f(x))=x$: (2)

Λόγω τις (2) έχουμε ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\begin{cases}2f(x)+\eta\mu(f(x))=x\\2f(y)+\eta\mu(f(y))=y\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(x)+\eta\mu(f(x))-2f(y)-\eta\mu(f(y))=x-y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(f(x)-f(y))+\eta\mu(f(x))-\eta\mu(f(y))=x-y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(f(x)-f(y))=x-y-(\eta\mu(f(x))-\eta\mu(f(y)))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2(f(x)-f(y))|=|(x-y)-(\eta\mu(f(x))-\eta\mu(f(y)))|\overset{(|\alpha-\beta|\le|\alpha|+|\beta|)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2|f(x)-f(y)|\le|x-y|+|\eta\mu(f(x))-\eta\mu(f(y))|\le|x-y|+|f(x)-f(y)|\Rightarrow$$

(αφού $|\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta|\le|\alpha-\beta|$)

$$\Rightarrow 2|f(x)-f(y)|\le|x-y|+|f(x)-f(y)|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)|\le|x-y|.$$

Άρα για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$: (3)

ii) Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ τυχαίος . Λόγω της (3) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

ΖΑΝΤΑΡΗΣ ΝΙΚΟΣ

$$\left|f(x)-f(x_0)\right| \le |x-x_0| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -|x-x_0| \le f(x)-f(x_0) \le |x-x_0| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x_0)-|x-x_0| \le f(x) \le f(x_0)+|x-x_0| : (4)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x_0)-|x-x_0|\right) = f(x_0)-0 = f(x_0)$

και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x_0)+|x-x_0|\right) = f(x_0)+0 = f(x_0)$,

οπότε, λόγω της (4) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (κριτήριο παρεμβολής).

Άρα για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, οπότε η f είναι συνεχής

στο $\mathbb{R}$.

iii) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$2f(x)+\eta\mu\left(f(x)\right) = x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2f(x)+\eta\mu\left(f(x)\right)}{x} = \frac{x}{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2f(x)}{x} + \frac{\eta\mu\left(f(x)\right)}{x} = 1$$
$$\Rightarrow 2\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{\eta\mu\left(f(x)\right)}{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} - \frac{\eta\mu\left(f(x)\right)}{2x} \Rightarrow$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{2} = -\frac{\eta\mu(f(x))}{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{\eta\mu(f(x))}{2x}\right| = \frac{|\eta\mu(f(x))|}{|2x|} \le \frac{1}{|2x|} \overset{(x>0)}{=} \frac{1}{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2x} \le \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} \quad : (5).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$,

οπότε, λόγω της (5) , προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ (κριτήριο παρεμβολής)

iv) **α)** $2f(x) + \eta\mu(f(x)) = x$: (1)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$

Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} 2f(x_1) = 2f(x_2) \\ \eta\mu(f(x_1)) = \eta\mu(f(x_2)) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2f(x_1) + \eta\mu(f(x_1)) = 2f(x_2) + \eta\mu(f(x_2)) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

Επομένως η f είναι συνάρτηση 1-1.

β) Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = 2x + \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Είναι $h'(x) = 2 + \sigma\upsilon\nu x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left(-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1 \Rightarrow 1 \le 2 + \sigma\upsilon\nu x \le 3 \Rightarrow 2 + \sigma\upsilon\nu x > 0\right),$$

οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η σχέση (1), με την βοήθεια της $h(x) = 2x + \eta\mu x$ γράφεται $h(f(x)) = x$: (6)

Θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Έχουμε όμως $f(x_1) \ge f(x_2) \overset{(h\nearrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} h(f(x_1)) \ge h(f(x_2)) \overset{(6)}{\Rightarrow} x_1 \ge x_2$,

ΑΤΟΠΟ, αφού είναι $x_1 < x_2$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ν) Έχουμε:

$$\int_{2-x}^{2x+1} f(t)\,dt > \int_{1-x}^{2x} f(t)\,dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{2-x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{2x+1} f(t)\,dt > \int_{1-x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{2x} f(t)\,dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{0}^{2x+1} f(t)\,dt - \int_{0}^{2-x} f(t)\,dt > \int_{0}^{2x} f(t)\,dt - \int_{0}^{1-x} f(t)\,dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{0}^{2x+1} f(t)\,dt - \int_{0}^{2x} f(t)\,dt > \int_{0}^{2-x} f(t)\,dt - \int_{0}^{1-x} f(t)\,dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(2x) > \varphi(1-x),$$

όπου $\varphi(x) = \int_{0}^{x+1} f(t)\,dt - \int_{0}^{x} f(t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\varphi(x) = \int_{0}^{x+1} f(t)\,dt - \int_{0}^{x} f(t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$ με

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

$$\varphi'(x) = \left(\int_0^{x+1} f(t)\,dt\right)' - \left(\int_0^{x} f(t)\,dt\right)' =$$
$$= f(x+1)(x+1)' - f(x) = f(x+1) - f(x)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$x+1 > x \Rightarrow f(x+1) > f(x) \overset{(f\nearrow\mathbb{R})}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow f(x+1) - f(x) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi'(x) > 0$$

Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι έχουμε:

$$\varphi(2x) > \varphi(1-x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x > 1 - x \overset{(\varphi\nearrow\mathbb{R})}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 3x > 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$$

ΘΕΜΑ VIII.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ένα μόνο ακρότατο, το οποίο είναι ολικό μέγιστο, το παρουσιάζει σ 'ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ και είναι $\max f(x) = x_0 - 1$.

ΛΥΣΗ

Είναι

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot (e^x + 1) - x \cdot (e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = \frac{1 \cdot (e^x + 1) - x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} =$$
$$= \frac{(1-x)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = e^x \frac{1 - x + e^{-x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \cdot g(x),$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

όπου $g(x) = 1 - x + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g'(x) = -\left(1 + e^{-x}\right) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1,2]$(*προκύπτει από τις πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων*)

Ακόμη είναι $g(1) = 1 - 1 + e^{-1} = \dfrac{1}{e} > 0$

και $g(2) = 1 - 2 + e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} - 1 = \dfrac{1 - e^2}{e^2} < 0$

οπότε είναι $g(1) \cdot g(2) < 0$.

Άρα η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[1,2]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (1,2)$, ώστε $g(x_0) = 0$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

Έχουμε

- $x > x_0 \overset{(g\searrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} g(x) < g(x_0) = 0$,
- $x < x_0 \overset{(g\searrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} g(x) > g(x_0) = 0$

- Για κάθε $x > x_0$ ισχύει $g(x) < 0 \Rightarrow \dfrac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} \cdot g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$.
- Για κάθε $x < x_0$ ισχύει $g(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} \cdot g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.
- Ακόμη είναι $f'(x_0) = \dfrac{e^{x_0}}{\left(e^{x_0} + 1\right)^2} \cdot g(x_0) = \dfrac{e^{x_0}}{\left(e^{x_0} + 1\right)^2} \cdot 0 = 0$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	max	↘

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_0]$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

και γνησίως φθίνουσα στο $\left[x_0,+\infty\right)$,

οπότε η f παρουσιάζει μόνο το $x_0 \in (1,2)$ ολικό μέγιστο, το οποίο είναι

$$\max f(x) = f(x_0) = \frac{x_0}{e^{x_0}+1}.$$

Έχουμε όμως ότι για το $x_0 \in (1,2)$ ισχύει:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 1 - x_0 + e^{-x_0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0} = x_0 - 1 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0 - 1}.$$

Έτσι έχουμε:

$$\max f(x) = \frac{x_0}{\frac{1}{x_0-1}+1} = \frac{x_0}{\frac{1+x_0-1}{x_0-1}} = x_0 - 1.$$

ΘΕΜΑ IX.

Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\cdot f''(x) > \left(f'(x)\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και είναι $f(0)=2$ και $f'(0)=1$.

1) Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
2) Να δείξετε ότι $f(x)\ge x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
3) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι κυρτή και $f(x)\ge 2e^{x/2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
4) Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε $f(\alpha)\cdot f(2-\beta) = 4\cdot e^{1+\frac{\alpha-\beta}{2}}$.
5) Αν $x,y,z\in\mathbb{R}$ και $x+y+z=0$ να δείξετε ότι $f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)\ge 8$.
6) Να δείξετε ότι $\int_{\sqrt{2m}}^{\sqrt{2n}} f(x^2)f(2\ln x)dx > 4\left(e^n - e^m\right)$, για κάθε $m,n>0$ με $m<n$.

ΛΥΣΗ

1) $f(x)\cdot f''(x) > \left(f'(x)\right)^2$: (1)

Από την (1) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

ΖΑΝΤΑΡΙΑΗΣ ΝΙΚΟΣ

$$f(x)\cdot f''(x) > \left(f'(x)\right)^2 \geq 0 \Rightarrow f(x)\cdot f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$$

Η συνάρτηση f, ως παραγωγίσιμη, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \neq 0$, οπότε η f διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο και επειδή είναι $f(0) = 2 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι από τη (1) έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\begin{cases} f(x)\cdot f''(x) > \left(f'(x)\right)^2 \\ f(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) > \dfrac{\left(f'(x)\right)^2}{f(x)} \geq 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) > 0$$

επειδή ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

2)Η εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$ είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 2 = 1\cdot x \Leftrightarrow y = x + 2$$

Άρα (ε): $y = x + 2$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενή της ευθεία (ε): $y = x + 2$ σ 'όλο το $\mathbb{R}$, με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $M(0, f(0))$. Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$f(x) \geq x + 2$: (2), με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

3) Είναι:

$$g'(x) = \left(\ln\left(f(x)\right)\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$g''(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{\left(f(x)\right)^2} = \frac{f(x)f''(x) - \left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2} > 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(*αφού για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει* $f''(x)f(x) > \left(f'(x)\right)^2$ *και* $\left(f(x)\right)^2 > 0$).

Άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ΖΑΝΤΑΡΙΑΣ ΝΙΚΟΣ

Είναι $g(0) = \ln(f(0)) = \ln 2$ και $g'(0) = \dfrac{f'(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{2}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης **(δ)** της C_g στο $N(0, g(0))$ είναι:

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - \ln 2 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \ln 2.$$

Άρα **(δ):** $y = \dfrac{1}{2}x + \ln 2$.

Επειδή η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενη της ευθεία **δ:** $y = \dfrac{1}{2}x + \ln 2$ σ' όλο το $\mathbb{R}$ με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $N(0, g(0))$.

Δηλαδή για κάθε ισχύει $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x) \geq \frac{1}{2}x + \ln 2 \Rightarrow \ln(f(x)) \geq \ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right) + \ln 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(f(x)) \geq \ln\left(2e^{\frac{x}{2}}\right) \overset{(\ln x \nearrow)}{\Rightarrow} f(x) \geq 2e^{\frac{x}{2}},$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

4) Για την συνάρτηση f ισχύει $f(x) \geq 2e^{\frac{x}{2}}$: (3) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Έτσι έχουμε $f(\alpha) \geq 2e^{\frac{\alpha}{2}} > 0$, με την ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = 0$

και $f(2-\beta) \geq 2e^{\frac{2-\beta}{2}} > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν

$\dfrac{2-\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta = 2$,

οπότε είναι

$$f(\alpha) \cdot f(2-\beta) \geq 4 \cdot e^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{\frac{2-\beta}{2}} \Leftrightarrow f(\alpha) \cdot f(2-\beta) \geq 4 \cdot e^{1+\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\alpha = 0$ και $\beta = 2$.

Επομένως, για να ισχύει $f(\alpha) \cdot f(2-\beta) = 4 \cdot e^{1+\frac{\alpha-\beta}{2}}$ πρέπει και αρκεί να είναι $\alpha = 0$ και $\beta = 2$.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

5) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 2e^{\frac{x}{2}} > 0$, οπότε για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ με $x + y + z = 0$ ισχύουν:

$$\begin{cases} f(x) \geq 2e^{\frac{x}{2}} > 0 \\ f(y) \geq 2e^{\frac{y}{2}} > 0 \Rightarrow f(x) \cdot f(y) \cdot f(z) \geq 8 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{y}{2}} \cdot e^{\frac{z}{2}} \Rightarrow \\ f(z) \geq 2e^{\frac{z}{2}} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f(y) \cdot f(z) \geq 8 \cdot e^{\frac{x+y+z}{2}} = 8 \cdot e^{\frac{0}{2}} = 8 \cdot 1 = 8$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f(y) \cdot f(z) \geq 8$$

6) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) \geq 2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$:(3) , με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Λόγω της (3) έχουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x^2) > 2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} > 0 : (4)$$

$$\text{και } f(2\ln x) \geq 2 \cdot e^{\frac{2\ln x}{2}} = 2e^{\ln x} = 2x > 0 : (5),$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο να $2\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Από (4) και (5) προκύπτει ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x^2) f(2\ln x) > 2e^{\frac{x^2}{2}} \cdot 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x^2) f(2\ln x) > 4xe^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x^2) f(2\ln x) - 4xe^{\frac{x^2}{2}} > 0$$

Έτσι για κάθε $m, n \in (0, +\infty)$ με $m < n$

και για κάθε $x \in \left[\sqrt{2m}, \sqrt{2n}\right]$ $(m < n \Rightarrow 2m < 2n \Rightarrow \sqrt{2m} < \sqrt{2n})$

ισχύει:

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

$$f\left(x^2\right)f\left(2\ln x\right)-4xe^{\frac{x^2}{2}}>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{\sqrt{2m}}^{\sqrt{2n}}\left(f\left(x^2\right)f\left(2\ln x\right)-4xe^{\frac{x^2}{2}}\right)dx>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{\sqrt{2m}}^{\sqrt{2n}}f\left(x^2\right)f\left(2\ln x\right)dx-4\int_{\sqrt{2m}}^{\sqrt{2n}}xe^{\frac{x^2}{2}}dx>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{\sqrt{2m}}^{\sqrt{2n}}f\left(x^2\right)f\left(2\ln x\right)dx>4\cdot\left[e^{\frac{x^2}{2}}\right]_{\sqrt{2m}}^{\sqrt{2n}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{\sqrt{2m}}^{\sqrt{2n}}f\left(x^2\right)f\left(2\ln x\right)dx>4\left(e^n-e^m\right)$$

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ – ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

1. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύουν:

α) $\dfrac{1}{x+1} < \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}$

β) $e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e$

2. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$2f(x) > \left(f'(x_1)+f'(x_2)\right)x + f(x_1) + f(x_2) - \left(x_1 f'(x_1) + x_2 f'(x_2)\right).$$

3. Για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(\alpha)f(\alpha+\beta) < f'(\alpha+\beta)f(\alpha)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta > 0$.

1) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln(f(x))$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

2) Αν $x, y, z \in \mathbb{R}$ με $x < y < z$ να δείξετε ότι

$$(f(x))^y \cdot (f(y))^z \cdot (f(z))^x < (f(y))^x \cdot (f(z))^y \cdot (f(x))^z.$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

2) Να λυθεί η εξίσωση $\ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^2+4x+5}\right) = x^2 - x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

3) Να λυθεί η ανίσωση $\ln\left(\dfrac{x^8+1}{x^2+1}\right) < x^4 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

ΖΑΝΤΑΡΙΑΣ ΝΙΚΟΣ

1) $10^{\sqrt{11}}$, $11^{\sqrt{10}}$

2) $e^{\sqrt[\nu]{3}-\sqrt[\nu]{2}}$, $\sqrt[\nu]{\frac{3}{2}}$, $\begin{pmatrix} \nu \in \mathbb{N} \\ \nu \geq 2 \end{pmatrix}$

6. Η συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(2x)-f(x)}{x} & , x > 0 \\ f'(0) & , x = 0 \end{cases}$$

7. Η συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0,+\infty)$. Ακόμη είναι $f(0) = f'(0) = 0$.

1) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις

α) $g(x) = f(x^2) - xf(x), x > 1$

β) $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ $, x > 0$

2) Αν $0 < x < y$, να συγκριθούν οι αριθμοί $xf(xy^2)$ και $yf(x^2y)$.

8. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\mathbb{R}$. Να λυθεί η εξίσωση $f(0) + f(2x) = 2f(x)$.

9. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

α) Να δείξετε ότι :

$$f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $k > 0$ ώστε να ισχύει $f'(x) > \dfrac{1999}{1000}$,

για κάθε $x > k$.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

10.

1). Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^{\nu+1} \geq (\nu+1)x - \nu, (\nu \in \mathbb{N}^*)$.

2). Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ισχύει:

i) $\dfrac{\alpha^{\nu+1}}{\beta^{\nu}} + \dfrac{\beta^{\nu+1}}{\gamma^{\nu}} + \dfrac{\gamma^{\nu+1}}{\alpha^{\nu}} \geq \alpha + \beta + \gamma, (\nu \in \mathbb{N}^*)$

ii) $\dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu+1}} + \dfrac{\beta^{\nu}}{\gamma^{\nu+1}} + \dfrac{\gamma^{\nu}}{\alpha^{\nu+1}} \geq \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}, (\nu \in \mathbb{N}^*)$

11. Να δείξετε ότι:

i) $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.

ii) $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) $e^x \geq ex$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) $e^x \geq x^e$, για κάθε $x > 0$.

v) $x^x \geq e^{x-1}$, για κάθε $x > 0$.

vi) $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

vii) $x^2 \geq x + \ln x$, για κάθε $x > 0$.

12. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \geq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right).$$

13.

i) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta > 0$ ισχύει:

$$\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \geq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}.$$

ii) Να δείξετε ότι: $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 9^9 > 5^{45}$.

(βιβλίο Καζαντζή-Μήτσιου)

14.

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - x - \ln x$, $x > 0$.

ΖΑΝΤΑΡΙΑΣ ΝΙΚΟΣ

β) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$, να δείξετε ότι
$2\left(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3\right) + 3 \geq 2\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) + \alpha + \beta + \gamma$.

15. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) > f'(y)(x - y) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ με } x \neq y.$$

i) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ με $\alpha < x < \beta$ ισχύει: .

$$f(x) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + f(\alpha).$$

16. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\left(f(\alpha) + f(\beta)\right) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

17.

1). Να δείξετε ότι $\dfrac{2(x-1)}{x+1} < \ln x < \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$, για κάθε $x > 1$

2). Αν $0 < \alpha < \beta$ να δείξετε ότι:

i) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $\dfrac{\beta}{\alpha} = e^{\frac{\beta - \alpha}{\xi}}$.

ii) $\sqrt{\alpha \cdot \beta} < \xi < \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, (το ξ είναι το ερωτήματος (i))

(Διαγ. Ρουμανία)

18.

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

β) Να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma > 0$ αν ισχύει:

$$\alpha^{\sqrt{\beta \cdot \gamma}} \cdot \beta^{\sqrt{\gamma \cdot \alpha}} \cdot \gamma^{\sqrt{\alpha \cdot \beta}} = e^{\frac{6\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{e}}.$$

19. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$|f(x) - f(y) - x + y| < |x - y|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y$.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

1) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

2) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $f(x^3) + f(x^5) + f(x^7) = 3f(1)$

β) $3f(x) + 2f(e^{x-1}) = 5f(2-x)$

3) Να λυθεί η ανίσωση

$f(2x) + f(3x-1) < 2f(x+1)$.

4) Αν επιπλέον ισχύει:

$f(x + f(x)) + 2x = 2f(x) + f(2x)$, να βρείτε την f.

20.

i) Να μελετηθεί η $f(x) = x\ln x - x$, $x > 0$ ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι: $x\ln x > x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

ii) Να δείξετε ότι: $(1.05)^{1.05} \cdot (0.97)^{0.97} \cdot (0.98)^{0.98} > 1$.

21. Να δείξετε ότι:

1) $x^2 \geq 2\ln x + 1$, για κάθε $x > 0$.

2) $x^x \cdot e^{1-x} \geq 1$, για κάθε $x > 0$.

3) $x \cdot y \leq e^{x-1} + y\ln y$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $y > 0$.

4) $x^x \geq e^{2x-e}$, για κάθε $x > 0$.

5) $x^5 \geq x^3 + 2\ln x$, για κάθε $x > 0$.

22. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $2e^{f(x)} = f^2(x) + \int_x^{x+1} e^{t^3} dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

23. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - 4x + k = 0$ με $k > 3$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

24. Αν $f(x) = (x + \mu)e^{-\mu x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$.

ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Να δείξετε ότι: $\min\left(\max f(x)\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}$.

25. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha x \le (\alpha - 1)e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

26. Αν $\alpha, \beta \in (0,1)$ με $\alpha + \beta = 1$ να δείξετε ότι: $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \ge \frac{1}{2}$.

27. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f^3(x) + f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

28. Η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$.

1) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

2) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.

3) Αν η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$, να εξεταστεί αν το $x_0 \in (\alpha, \beta)$ για το οποίο ισχύει $f(x_0) = \frac{\alpha + \beta}{2}$ είναι πλησιέστερα στο α απ΄ ότι στο β.

29.

1) Να δείξετε ότι : $x^4 \ge 4x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2) Αν η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει $\int_0^1 f(x)dx = 1$, να δείξετε ότι $\int_0^1 f^4(x)dx \ge 1$.

30. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) > 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι:

$$\int_0^1 f(x) f(x^2) f(x^3) dx > \frac{1}{7}.$$

ΖΑΝΤΑΡΙΑΣ ΝΙΚΟΣ

31. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 \ln x + x,\ x > 0$.

1) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

2) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f(x^2) + f(x^3) = 3f(x^4)$.

32. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$f'(x) = \left(e^{x^3} - e^{-x^3}\right) \cdot \left(e^{x^4+4} - e^{4x}\right) \cdot x^{2015}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να λυθεί η εξίσωση

$$f(x^3) + f(2x-1) = f(x) + f(1).$$

33. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{x^{2015}}{2015} + \frac{x^{2014}}{2014} + \ldots + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{1} + 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

1) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2015}$ έχει ακριβώς μια πραγματική λύση.

3) Να λυθεί η εξίσωση $f(e^{x-1}) + f(x^3) = 2f(1)$.

34. Για τη παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύει , $f'(x+y) < f'(x)$ για κάθε $x \geq 0$ και $y > 0$. Ακόμη είναι $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$.

1) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.

2) Να δείξετε ότι $f(x) > xf'(x)$ για κάθε $x > 0$.

3) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

4) Να δείξετε ότι $f(x) < x,\ x > 0$.

5) Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2015} \in (0, +\infty)$ και $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2015} = 2015$ να δείξετε ότι $f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \ldots + f(\alpha_{2015}) > f(2015)$.

35. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει :

ΖΑΝΤΑΡΙΑΣ ΝΙΚΟΣ

$$f^3(x) + 3f(x) = 3x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι: $\left| f(\beta) - f(\alpha) \right| \le \left| \beta - \alpha \right|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

36. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$, $(\alpha > 0)$.

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

2) Να βρείτε την fof.

3) Αν $x_1, x_2 \in D_f$, να βρείτε την μέγιστη τιμή της παράστασης $(x_1 - x_2)^2 + (f(x_1) - f(x_2))^2$.

37. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

ισχύει: $f'(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: $\left| f(\beta) - f(\alpha) \right| \ge \left| \alpha - \beta \right|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

38. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

ισχύει: $y \cdot (f(x+y) - f(y)) \ge 2015\eta\mu^2 y - 2014y^2$,

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

1) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2) Να λυθεί η εξίσωση: $f(2^x + 3^x) + f(5) = 2f(5^x)$, $x \in \mathbb{R}$

3) Αν επιπλέον ισχύει : $2f(f(x)) = x + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,να δείξετε ότι $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$..

39.

1). Να δείξετε ότι: $e^x \ge 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, για κάθε $x \ge 0$.

2). Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\,dx > \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$.

ΖΑΝΤΑΡΙΑΗΣ ΝΙΚΟΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 15 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Θέμα Α

Α 1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $x_o \in (\alpha,\beta)$, στο οποίο η f είναι συνεχής και ισχύουν:

$f'(x)<0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_o)$ και

$f'(x)>0$ για κάθε $x \in (x_o, \beta)$.

Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό ελάχιστο.

(8 Μονάδες)

Α 2. Να διατυπωθεί το θεώρημα της μέσης τιμής και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του.

(5 Μονάδες)

Α 3. Να δοθεί ο ορισμός της συνάρτησης 1-1.

(4 Μονάδες)

Α 4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστή, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:*

1. Για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ που είναι γνησίως αύξουσα

Ζαντάρίδης Νίκος

στο R, ισχύει $f'(x)>0$, για κάθε $x\in R$.

(2 Μονάδες)

2. Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής στο R και ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, τότε $\int_4^{\pi} f(x)dx>0$.

(2 Μονάδες)

3. Για κάθε $z,w\in C$ ισχύει $\overline{z+iw}=z-iw$.

(2 Μονάδες)

4. Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής στο R και είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$, τότε ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, για κάθε $\alpha,\beta\in R$.

(2 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Για τους μη μηδενικούς μιγαδικούς z,w ισχύει:

$$z^2\cdot|w|^2+2|z|^2\cdot w^2=12zw.$$

Β1. Να δείξετε ότι $z\overline{w}=4$.

(6 Μονάδες)

Β2. Αν **Α** είναι η εικόνα του z, **Β** είναι η εικόνα του w, να δείξετε ότι τα σημεία $O(0,0)$, **Α**, **Β** είναι συνευθειακά.

(6 Μονάδες)

Β3. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z, iw και $0+0i$.

(6 Μονάδες)

Β4. Αν επιπλέον ισχύει $5|z|=|w|+1$ να δείξετε ότι $w=4z$.

(7 Μονάδες)

Ζαντάρίδης Νίκος

ΘΕΜΑ Γ

Για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ ισχύει :

1) $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x^2}\right)\geq x^2,\ \forall x>0$.

2) $f''(x)=6f^2(x),\ \forall x>0$.

3) $f(1)=1$.

Γ 1. Να δείξετε ότι

i) $f'(1)=-2$.

ii) $f(x)=\frac{1}{x^2},\ x>0$.

(4+5 Μονάδες)

Γ 2. Να βρείτε το σημείο της C_f που απέχει την μικρότερη απόσταση από το $O(0,0)$ και την απόσταση αυτή.

(5 Μονάδες)

Γ 3. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2\left(f\left(\eta\mu^2 x\right)-f(x^2)\right)\right]$.

(5 Μονάδες)

Γ 4. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1: y=\alpha^3 x,\ \varepsilon_2: y=\beta^3 x$, όπου $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ με $\beta-\alpha=1344$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες ε_1 και ε_2.

(6 Μονάδες)

Ζωνταρίδης Νίκος

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής στο R.
Ακόμη ισχύουν:

- $f(x+y)>f(x-y)$ για κάθε $x,y\in R$ με $y>0$.
- $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$.
- $xf(x)\geq e^x-1$, για κάθε $x\in R$.

Δ 1. Να δείξετε ότι :

i) η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii) $f(0)=1$.

(5+4 Μονάδες)

Δ 2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_{2x}^{x+1} f(t-x)dt=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση στο R.

(6 Μονάδες)

Δ 3. Δίνεται η συνάρτηση

$$H(x)=\int_0^{x-1} f(t)dt+x^2-3x,\quad x\in R.$$

i) Να μελετηθεί η H ως προς τη μονοτονία.

(5 Μονάδες)

ii) Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} 3\int_0^{\alpha-1} f(t)dt+\beta^2-3\beta+2=0 \\ \int_0^{\beta-1} f(t)dt+3\alpha^2-9\alpha+6=0 \end{cases}$$

με αγνώστους $\alpha,\beta\in R$.

(5 Μονάδες)

Ζαντάρίδης Νίκος

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ με τις f', f'' γνησίως μονότονες στο $[\alpha,\beta]$.

Λόγω του **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Θα εξετάσουμε αν το ξ βρίσκεται πλησιέστερα στο α απ' ότι στο β.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι οι συναρτήσεις f', f'' είναι γνησίως αύξουσες στο $[\alpha,\beta]$.

(θεωρούμε τη διαφορά

$$f'(\xi)-f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}-f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$ *οπότε είναι*

$$(\beta-\alpha)\left[f'(\xi)-f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]=f(\beta)-f(\alpha)-(\beta-\alpha)f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$ *).*

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)-f(\alpha)-(x-\alpha)f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right),\quad x\in[\alpha,\beta].$$

Είναι $g'(x)=f'(x)-f'\left(\dfrac{\alpha+x}{2}\right)-\dfrac{x-\alpha}{2}f''\left(\dfrac{\alpha+x}{2}\right)$.

Έστω $x\in(\alpha,\beta]$.

Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής , για την f' στο $\left[\dfrac{\alpha+x}{2},x\right]$,

υπάρχει $\theta\in\left(\dfrac{\alpha+x}{2},x\right)$, ώστε

$$f''(\theta)=\frac{f'(x)-f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)}{x-\frac{\alpha+x}{2}}=\frac{2}{x-\alpha}\left(f'(x)-f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)\right)$$ οπότε, είναι

$f'(x)-f'\left(\dfrac{\alpha+x}{2}\right)=\dfrac{x-\alpha}{2}f''(\theta)$. Επομένως είναι

$$g'(x)=\frac{x-\alpha}{2}f''(\theta)-\frac{x-\alpha}{2}f''\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)=\frac{x-\alpha}{2}\left(f''(\theta)-f''\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)\right)$$

.

Έχουμε όμως

Ζαγγαρίδης Νίκος

$$\alpha < \frac{\alpha + x}{2} < \theta < x \le \beta \overset{(f'' \nearrow [\alpha,\beta])}{\Rightarrow} f''\left(\frac{\alpha + x}{2}\right) < f''(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(\theta) - f''\left(\frac{\alpha + x}{2}\right) > 0 \overset{\left(\frac{x-\alpha}{2}>0\right)}{\Rightarrow} \left(\frac{x - \alpha}{2}\right)\left(f''(\theta) - f''\left(\frac{\alpha + x}{2}\right)\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) > 0$$

Έτσι για κάθε $x \in (\alpha, \beta]$ ισχύει $g'(x) > 0$ και η g είναι συνεχής στο α, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$.

Έτσι έχουμε:

$$\beta > \alpha \overset{(g \nearrow)}{\Rightarrow} g(\beta) > g(\alpha) \Rightarrow f(\beta) - f(\alpha) - (\beta - \alpha) f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\beta) - f(\alpha) > (\beta - \alpha) f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\overset{(\beta-\alpha>0)}{\Rightarrow} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi) > f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \overset{(f' \nearrow)}{\Rightarrow} \xi > \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Επομένως το ξ βρίσκεται πλησιέστερα στο β απ' ότι στο α.

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι αν οι f', f'' είναι γνησίως μονότονες στο $[\alpha, \beta]$, τότε

1) αν οι f', f'' έχουν ίδιο είδος μονοτονίας, τότε το ξ είναι πλησιέστερα στο β.
2) αν οι f', f'' έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας, τότε το ξ είναι πλησιέστερα στο α.

Ζουταρίδης Νίκος

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 15 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α 1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$, στο οποίο η f είναι συνεχής και ισχύουν:

$f'(x)<0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και

$f'(x)>0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$.

Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

(8 Μονάδες)

Α 2. Να διατυπωθεί το θεώρημα της μέσης τιμής και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του.

(5 Μονάδες)

Α 3. Να δοθεί ο ορισμός της συνάρτησης 1-1.

(4 Μονάδες)

Α 4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστή, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:*

1. Για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R \to R$ που είναι γνησίως αύξουσα στο R, ισχύει: $f'(x)>0$, για κάθε $x \in R$.

(2 Μονάδες)

2. Αν η συνάρτηση $f:R \to R$ είναι συνεχής στο R και ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x \in R$, τότε $\int_4^{\pi} f(x)dx > 0$.

(2 Μονάδες)

3. Για κάθε $z,w \in C$ ισχύει $\overline{z+iw} = z - iw$.

(2 Μονάδες)

Ζαντσαρίδης Νίκος

4. Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής στο R και είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$, τότε ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, για κάθε $\alpha,\beta\in R$.

(2 Μονάδες)

Απαντήσεις

A1. Θεωρία

A2. Θεωρία

A3. Θεωρία

A4.

1). Λ

2). Λ

3). Λ

4). Σ

ΘΕΜΑ Β

Για τους μη μηδενικούς μιγαδικούς z,w ισχύει:

$$z^2\cdot|w|^2+2|z|^2\cdot w^2=12zw\,.$$

B1. Να δείξετε ότι $z\overline{w}=4$.

(6 Μονάδες)

B2. Αν **A** είναι η εικόνα του z, **B** είναι η εικόνα του w, να δείξετε ότι τα σημεία $O(0,0)$, **A**, **B** είναι συνευθειακά.

(6 Μονάδες)

B3. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z, iw και $0+0i$.

(6 Μονάδες)

B4. Αν επιπλέον ισχύει $5|z|=|w|+1$ να δείξετε ότι $w=4z$.

(7 Μονάδες)

ΛΥΣΗ

B1. Έχουμε :

$$z^2\cdot|w|^2+2|z|^2\cdot w^2=12zw\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2w\overline{w}+2z\overline{z}w^2=12zw\overset{(z\cdot w\neq 0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow z\overline{w}+2\overline{z}w=12:\ (1)\,.$$

Ζαντοπόπης Νίκος

Έστω $z\overline{w}=\alpha+\beta i,\ \ \alpha,\beta\in R$

Έχουμε

$$(1)\Leftrightarrow z\overline{w}+2\overline{z\overline{w}}=12\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha+\beta i+2(\alpha-\beta i)=12\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\alpha-\beta i=12+0i\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha=12\\-\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=4\\\beta=0\end{cases}.$$

Επομένως είναι $z\overline{w}=4+0i=4:(2)$.

B2. Έχουμε:

$$z\overline{w}=4\Rightarrow z\frac{|w|^2}{w}=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow z=\frac{4}{|w|^2}\cdot w\Rightarrow z=\lambda\cdot w,\ \lambda=\frac{4}{|w|^2}\in R_+^*\Rightarrow$$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB},\ \lambda\in R_+^*\right)\Rightarrow\overrightarrow{OA}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OB}$. Άρα τα σημεία O,A,B είναι συνευθειακά.

(2ος τρόπος)

Έστω $z=x_1+y_1i,\ (x_1,y_1\in R)$ και $w=x_2+y_2i,\ (x_2,y_2\in R)$

Έχουμε:

$$z\overline{w}=4\Leftrightarrow(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)=4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x_1x_2+y_1y_2)+(y_1x_2-x_1y_2)i=4+0i\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1x_2+y_1y_2=4:(3)\\y_1x_2-x_1y_2=0:(4)\end{cases}.$$

Είναι $A(x_1,y_1)$ η εικόνα του z και $B(x_2,y_2)$ η εικόνα του w, οπότε $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1),\ \overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$.

Έχουμε : $\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}=x_1y_2-y_1x_2=-(y_1x_2-x_1y_2)\overset{(4)}{=}-0=0$,

οπότε είναι $\overrightarrow{OA}//\overrightarrow{OB}$. Επομένως τα σημεία O, A, B είναι συνευθειακά.

B3. Η εικόνα του μιγαδικού $z=x_1+y_1i,\ (x_1,y_1\in R)$ είναι το $A(x_1,y_1)$.

Η εικόνα του $iw=i(x_2+y_2i)=-y_2+x_2i,\ (x_2,y_2\in R)$

Ζαντοπούλος Νίκος

είναι το $\Gamma(-y_2, x_2)$ και η εικόνα του $0+0i$ είναι το $O(0,0)$.

Είναι $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{O\Gamma}=(-y_2,x_2)$ και

$$\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\Gamma})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_2 & x_2 \end{vmatrix}=x_1x_2+y_1y_2\overset{(3)}{=}4,$$

οπότε το εμβαδό του τρίγωνου ΟΑΓ είναι

$$(OA\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\Gamma})\right|=\frac{1}{2}|4|=2 \text{ τ.μ.}$$

Σχόλιο

$$\left(\begin{array}{l}\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\Gamma})\neq 0\Rightarrow \overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{O\Gamma}\Rightarrow \\ \Rightarrow (O,\ A,\ \Gamma:\text{ μη συνευθειακά})\Rightarrow \\ \Rightarrow (O,\ A,\ \Gamma:\text{ κορυφές τριγώνου})\end{array}\right)$$

Β4. Έχουμε :

$$z\overline{w}=4\Rightarrow |z\overline{w}|=|4|\Rightarrow |z||\overline{w}|=4\Rightarrow |z||w|=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z|(5|z|-1)=4\Rightarrow \qquad (\text{αφού } |w|=5|z|-1)$$

$$\Rightarrow 5|z|^2-|z|-4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|z|=1 \\ \text{ή} \\ |z|=-\dfrac{4}{5}\ (\text{απορρίπτεται})\end{cases}.$$

Άρα είναι $|z|=1$ και $|w|=5|z|-1=5\cdot 1-1=4$.

Έχουμε $|w|=4\Leftrightarrow |w|^2=16\Leftrightarrow w\cdot\overline{w}=16\Leftrightarrow \overline{w}=\dfrac{16}{w}:(5)$.

Από την $z\overline{w}=4$, λόγω της (5), προκύπτει ότι :

$$z\frac{16}{w}=4\Leftrightarrow \boxed{w=4z}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R_+^*\to R$ ισχύει:

1) $f(x)\cdot f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\geq x^2,\ \forall x>0$.

2) $f''(x)=6f^2(x),\ \forall x>0$.

Ζουταρίδης Νίκος

3) $f(1)=1$.

Γ 1. Να δείξετε ότι

i) $f'(1)=-2$.

ii) $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ x>0$.

(4+5 Μονάδες)

Γ 2. Να βρείτε το σημείο της C_f που απέχει την μικρότερη απόσταση από το $O(0,0)$ και την απόσταση αυτή.

(5 Μονάδες)

Γ 3. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2\left(f\left(\eta\mu^2 x\right)-f(x^2)\right)\right]$.

(5 Μονάδες)

Γ 4. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1: y=\alpha^3 x,\ \varepsilon_2: y=\beta^3 x$, όπου $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ με $\beta-\alpha=1344$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες ε_1 και ε_2.

(6 Μονάδες)

ΛΥΣΗ

Γ 1.

i) Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(x)f\left(\frac{1}{x^2}\right)-x^2\geq 0:(1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-x^2,\ x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με :

$$g'(x)=\left(f(x)f\left(\frac{1}{x^2}\right)-x^2\right)'=$$

$$=f'(x)f\left(\frac{1}{x^2}\right)+f(x)f'\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(x^{-2}\right)'-2x=$$

$$=f'(x)f\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^3}f(x)f'\left(\frac{1}{x^2}\right)-2x.$$

Παρατηρούμε ότι

Ζαντάρτσης Νίκος

$g(1)=f(1)f\left(\frac{1}{1^2}\right)-1^2=f^2(1)-1=1^2-1=0$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $g(x)\geq g(1)$.
Επομένως η g παρουσιάζει στο σημείο $x_o=1$ (*ολικό*) ελάχιστο. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_o=1$ του $(0,+\infty)$ τοπικό ακρότατο, έπεται σύμφωνα με **Θ.Fermat** ότι ισχύει :

$$g'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)f\left(\frac{1}{1^2}\right)-\frac{2}{1^3}f(1)f'\left(\frac{1}{1^2}\right)-2\cdot 1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -f(1)f'(1)-2=0\overset{(f(1)=1)}{\Leftrightarrow}-1\cdot f'(1)-2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'(1)=-2}.$$

ii) Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f''(x)=6f^2(x)\Rightarrow 2f'(x)f''(x)=12f^2(x)f'(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\left(f'(x)\right)^2\right]'=\left[4f^3(x)\right]'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(f'(x)\right)^2=4f^3(x)+c_1,\quad (c_1\in R \text{ σταθερά}).$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$\left(f'(1)\right)^2=4f^3(1)+c_1\Leftrightarrow(-2)^2=4\cdot 1^3+c_1\Leftrightarrow c_1=0.$$

Άρα για κάθε $x\in R_+^*$ ισχύει:

$$\left(f'(x)\right)^2=4f^3(x):(2)$$

Από την (1) έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει :

$$f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x^2}\right)\geq x^2>0\Rightarrow f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x^2}\right)\neq 0\Rightarrow f(x)\neq 0$$

Η f, ως παραγωγίσιμη , είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)\neq 0$, οπότε η f διατηρεί στο $(0,+\infty)$ σταθερό πρόσημο και επειδή είναι $f(1)=1>0$, συμπεραίνουμε ότι είναι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.
Από την (2) έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει :

$$\left(f'(x)\right)^2=4f^3(x)>0\Rightarrow\left(f'(x)\right)^2>0\Rightarrow f'(x)\neq 0.$$

Η f', ως παραγωγίσιμη , είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και επειδή ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, συμπεραίνουμε

Ζαντάρης Νίκος

ότι η $f'(x)$ διατηρεί στο $(0,+\infty)$ σταθερό πρόσημο. Είναι $f'(1)=-2<0$ και επειδή η f' διατηρεί στο $(0,+\infty)$ σταθερό πρόσημο έπεται ότι είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x>0$.

Έτσι για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$\left(f'(x)\right)^2=4f^3(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|f'(x)\right|=2\sqrt{f^3(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -f'(x)=2\left(f(x)\right)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow$$

(αφού είναι $f'(x)<0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x>0$)

$$\Rightarrow -\left(f(x)\right)^{-\frac{3}{2}}f'(x)=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\left(f(x)\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right)'=\left(2x\right)'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(f(x)\right)^{-\frac{1}{2}}=2x+c_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{f(x)}}=2x+c_2 .$$

Για $x=1$, έχουμε $\frac{2}{\sqrt{f(1)}}=2\cdot 1+c_2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1}}=2+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$.

Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει:

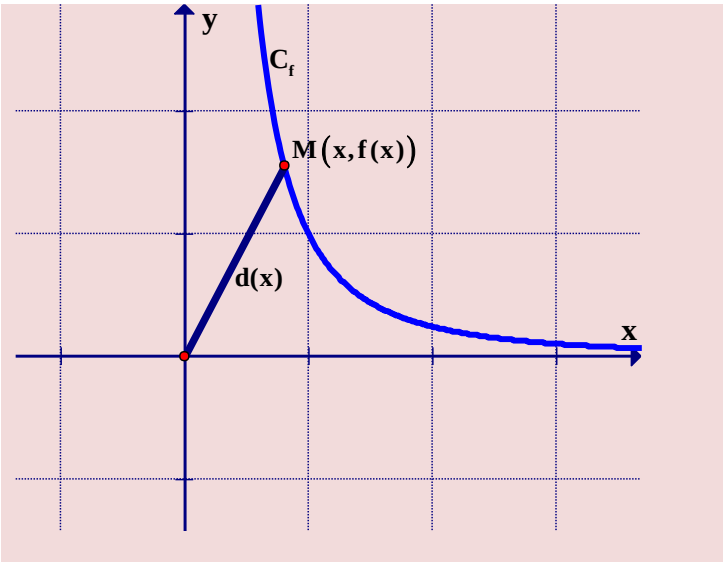
$$\frac{2}{\sqrt{f(x)}}=2x \Leftrightarrow \sqrt{f(x)}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2} \text{ (ικανοποιεί την υπόθεση)} .$$

Άρα είναι $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x>0$.

Γ 2. Έστω σημείο $M(x,f(x))$ της C_f.

Ζαντάρίδης Νίκος

Η απόσταση του M από την αρχή O(0,0) των αξόνων είναι:



$$d(x)=\sqrt{x^2+(f(x))^2}=$$

$$=\sqrt{x^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^4}}>0,\ \forall x>0$$

(αφού $x^2+\frac{1}{x^4}>0,\ \forall x>0$).

Είναι: $d'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^4}}}\left(x^2+x^{-4}\right)'=$

$$=\frac{1}{2d(x)}\cdot\left(2x-4x^{-5}\right)=\frac{1}{2d(x)}\cdot 2\left(x-\frac{2}{x^5}\right)=\frac{x^6-2}{x^5 d(x)},\quad x>0\,.$$

Έχουμε : $d'(x)>0\Leftrightarrow x>\sqrt[6]{2}$.

$d'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\sqrt[6]{2}$.

$d'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt[6]{2}$.

x	$-\infty$ 0	$\sqrt[6]{2}$	$+\infty$
$d'(x)$		- 0	+
$d(x)$		↘ min	↗

Από το πρόσημο της $d'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η $d(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\sqrt[6]{2}\right]$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\sqrt[6]{2},+\infty\right)$,

οπότε η $d(x)$ παρουσιάζει στο $x_o=\sqrt[6]{2}$ ολικό ελάχιστο, το

$$\min d(x)=d(\sqrt[6]{2})=\sqrt{\left(\sqrt[6]{2}\right)^2+\frac{1}{\left(\sqrt[6]{2}\right)^4}}=$$

οποίο είναι το :

$$=\sqrt{\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}=\sqrt{\sqrt[3]{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}=\sqrt{\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt[6]{432}\,.$$

Zovoilis Nikos

Επομένως το σημείο της C_f που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0,0)$ είναι το $M_o(\sqrt[6]{2},\frac{\sqrt[3]{4}}{2})$ και η μικρότερη απόσταση είναι:

$$(OM_o)=d(\sqrt[3]{2})=\frac{\sqrt[6]{432}}{2} \text{ μονάδες μήκους.}$$

Γ 3. Είναι :

$$x^2\left(f(\eta\mu^2x)-f\left(x^2\right)\right)=$$

$$=x^2\left(\frac{1}{\left(\eta\mu^2x\right)^2}-\frac{1}{\left(x^2\right)^2}\right)=$$

$$=x^2\left(\frac{1}{\eta\mu^4x}-\frac{1}{x^4}\right)=$$

$$=x^2\cdot\frac{x^4-\eta\mu^4x}{x^4\cdot\eta\mu^4x}=\frac{\left(x^2-\eta\mu^2x\right)\cdot\left(x^2+\eta\mu^2x\right)}{x^2\cdot\eta\mu^4x}=$$

$$=\frac{\left(x-\eta\mu x\right)\cdot\left(x+\eta\mu x\right)\cdot\left(x^2+\eta\mu^2x\right)}{x^2\cdot\eta\mu^4x}=\frac{\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\frac{x+\eta\mu x}{x}\cdot\frac{x^2+\eta\mu^2x}{x^2}}{\frac{x^2\cdot\eta\mu^4x}{x^6}}=$$

$$=\frac{\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}\right)\cdot\left(1+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right)}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^4},$$

για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ και

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\eta\mu x\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\left(3x^2\right)'}=$$

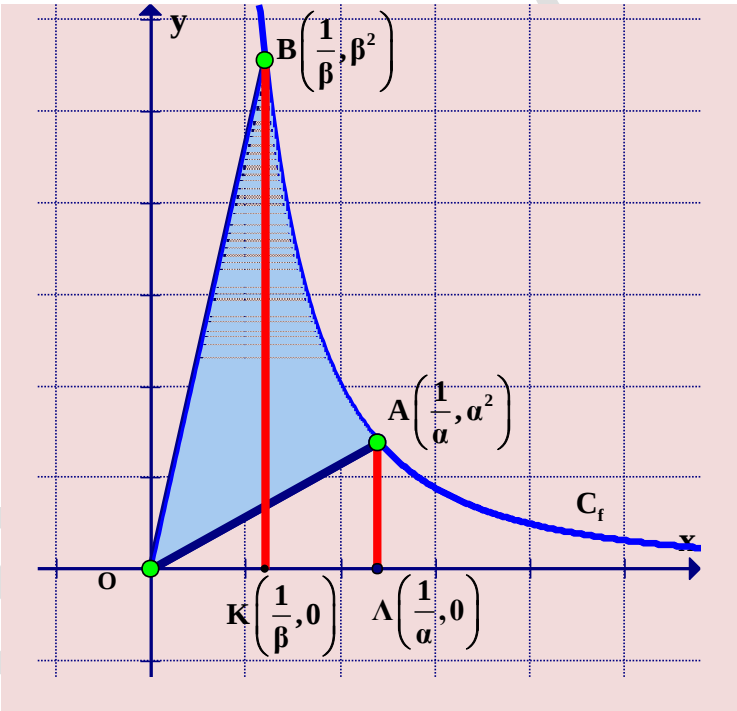
$$=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{1}{6}\cdot1=\frac{1}{6},$$ οπότε

Ζαντάρίδης Νίκος

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2\left(f(\eta\mu^2 x)-f(x^2)\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}\right)\cdot\left(1+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right)}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^4}=$$

$$=\frac{\frac{1}{6}\cdot(1+1)\cdot\left(1+1^2\right)}{1^4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Γ 4. Βρίσκουμε τα σημεία τομής των ε_1 και ε_2 με την C_f



$\underline{\underline{\varepsilon_1\cap C_f}}$

$$\begin{cases} y=\alpha^3 x \\ y=\dfrac{1}{x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\alpha^3 x \\ \alpha^3 x=\dfrac{1}{x^2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y=\alpha^3 x \\ x^3=\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{1}{\alpha} \\ y=\alpha^2\end{cases}$$

Άρα η (ε_1) τέμνει την C_f στο $A\left(\frac{1}{\alpha},\alpha^2\right)$.

$\underline{\underline{\varepsilon_2\cap C_f}}$

$$\begin{cases} y=\beta^3 x \\ y=\dfrac{1}{x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{1}{\beta} \\ y=\beta^2\end{cases},$$

οπότε η (ε_2) τέμνει την C_f στο $B\left(\frac{1}{\beta},\beta^2\right)$.

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι :

Ζαντάρια

$$E(\Omega)=(OKB)+\int_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\alpha}} f(x)dx-(O\Lambda A)=$$

$$=\frac{1}{2}(OK)(KB)+\int_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{2}(O\Lambda)(\Lambda A)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\beta^2+\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\alpha}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha^2=$$

$$=\frac{1}{2}\beta-\left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}-\frac{1}{\frac{1}{\beta}}\right)-\frac{1}{2}\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\beta-(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\beta-\alpha+\beta-\frac{1}{2}\alpha=$$

$$=\frac{3}{2}\beta-\frac{3}{2}\alpha=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)\overset{(\beta-\alpha=1344)}{=}\frac{3}{2}1344=2016\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής στο R.

Ακόμη ισχύουν:

- $f(x+y)>f(x-y)$ για κάθε $x,y\in R$ με $y>0$.
- $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$.
- $xf(x)\geq e^x-1$, για κάθε $x\in R$.

Δ 1. Να δείξετε ότι :

i) η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii) $f(0)=1$.

(5+4 Μονάδες)

Δ 2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_{2x}^{x+1} f(t-x)dt=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση στο R.

(6 Μονάδες)

Δ 3. Δίνεται η συνάρτηση $H(x)=\int_0^{x-1} f(t)dt+x^2-3x,\quad x\in R$.

Ζαντάρίδης Νίκος

i) Να μελετηθεί η H ως προς τη μονοτονία.

(5 Μονάδες)

ii) Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} 3\int_0^{\alpha-1} f(t)dt + \beta^2 - 3\beta + 2 = 0 \\ \int_0^{\beta-1} f(t)dt + 3\alpha^2 - 9\alpha + 6 = 0 \end{cases}$$

με αγνώστους $\alpha, \beta \in R$.

(5 Μονάδες)

ΛΥΣΗ

Δ 1.

i) $f(x+y) > f(x-y) \ :(1), \ \ (x \in R, y > 0).$

Έστω $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$. Από την (1), για $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$, έχουμε ότι ισχύει :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2}\right) > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Επομένως για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii) $xf(x) \geq e^x - 1 \ :(2)$

Από την (2) για κάθε $x > 0$, έχουμε ότι ισχύει

$f(x) \geq \frac{e^x - 1}{x} \ :(\alpha)$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

(αφού η f, ως συνεχής στο R, είναι συνεχής στο $x_0 = 0$)

Ζαντσάρος Νίκος

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1}=e^0=1$, οπότε από την (α)

προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\geq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\Rightarrow\boxed{f(0)\geq 1}:(\beta)$.

Από την (2) για κάθε $x<0$, έχουμε ότι ισχύει

$f(x)\leq\frac{e^x-1}{x}\quad:(\gamma)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$ (*αφού η* f *είναι συνεχής στο* $x_0=0$)

και $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x}{1}=e^0=1$, οπότε από την (γ)

προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\leq\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}\Rightarrow\boxed{f(0)\leq 1}:(\delta)$.

Από (β) και (δ) προκύπτει ότι $f(0)=1$.

Δ 2.

- $\int_{2x}^{x+1}f(t-x)dt=f(x)\ :(E)$

  Για το $\int_{2x}^{x+1}f(t-x)dt$ θέτουμε $:u=t-x$, οπότε είναι $t=u+x$ και $dt=du$.

  - ✓ Για $t=2x$ έχουμε $u=2x-x=x$ και
  - ✓ για $t=x+1$ έχουμε $u=x+1-x=1$.

  Άρα $\int_{2x}^{x+1}f(t-x)dt=\int_x^1 f(u)du=-\int_1^x f(t)dt$, οπότε η εξίσωση (E) ισοδυνάμως γράφεται: $-\int_1^x f(t)dt=f(x)\Leftrightarrow f(x)+\int_1^x f(t)dt=0\Leftrightarrow\varphi(x)=0$, όπου $\varphi(x)=f(x)+\int_1^x f(t)dt$.

  Επομένως η εξίσωση (E) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\varphi(x)=0$.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)\neq 0$, οπότε η f διατηρεί στο R σταθερό πρόσημο

Ζανταρίδης Νίκος

και επειδή είναι $f(0)=1>0$ έπεται ότι ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο R έπεται ότι η συνάρτηση $g(x)=\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R με

$g'(x)=\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο R.
Είναι $\varphi(x)=f(x)+g(x),\ x\in R$.
Μελετάμε την $\varphi(x)$ ως προς τη μονοτονία.
Έστω $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$.
Έχουμε:

$$x_1<x_2 \overset{(f,g\ \text{γν.αύξουσες στο}\ R)}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x_1)<f(x_2) \\ g(x_1)<g(x_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(x_1)<\varphi(x_2).$$

Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

- Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο R ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, οπότε η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$. Ακόμη είναι $\varphi(1)=f(1)+\int_1^1 f(t)dt=f(1)>0$ (αφού είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$)
και
$\varphi(0)=f(0)+\int_1^0 f(t)dt=f(0)-\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(0)dt-\int_0^1 f(t)dt=-\int_0^1 (f(t)-f(0))dt$.
Για κάθε $t\in(0,1]$ έχουμε:

$$0<t\le 1 \overset{(f\nearrow R)}{\Rightarrow} f(0)<f(t)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(t)-f(0)>0.$$

Έτσι για κάθε $t\in[0,1]$ ισχύει $f(t)-f(0)\ge 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $t=0$. Επομένως
$\int_0^1 (f(t)-f(0))dt>0\Rightarrow -\int_0^1 (f(t)-f(0))dt<0\Rightarrow \boxed{\varphi(0)<0}$.

Ζαντάρίδης Νίκος

Έτσι η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $\varphi(0)<0$ και $\varphi(1)>0$,
οπότε $\varphi(0)\varphi(1)<0$.
Άρα η φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Bolzano** στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$, ώστε $\varphi(\xi)=0$ και επειδή η φ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι το ξ είναι μοναδικό στο $\mathbb{R}$.
Άρα η εξίσωση $\varphi(x)=0$, οπότε και η εξίσωση (E), έχει ακριβώς μια πραγματική λύση.

Δ 3.

i) Είναι :

$$H'(x)=\left(\int_0^{x-1} f(t)dt+x^2-3x\right)'=$$

$$=\left(\int_0^{x-1} f(t)dt\right)'+\left(x^2-3x\right)'=$$

$$=f(x-1)(x-1)'+2x-3=f(x-1)+2x-3.$$

- Είναι $H'(1)=f(0)-1=1-1=0$.
- Για $x>1$ έχουμε:

$$x>1\Rightarrow\begin{cases}x-1>0\\2x>2\end{cases}\overset{(f\nearrow R)}{\Rightarrow}\left|\begin{array}{c}f(x-1)>f(0)=1\\2x>2\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x-1)+2x>3\Rightarrow f(x-1)+2x-3>0\Rightarrow H'(x)>0.$$

Για $x<1$ έχουμε :

$$x<1\Rightarrow\begin{cases}x-1<0\\2x<2\end{cases}\overset{(f\nearrow R)}{\Rightarrow}\begin{cases}f(x-1)<f(0)=1\\2x<2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x-1)+2x<3\Rightarrow f(x-1)+2x-3<0\Rightarrow H'(x)<0.$$

x	-∞	1	+∞
H'(x)	-	0	+
H(x)	↘	min	↗

Από το πρόσημο της $H'(x)$, που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η H είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γν. αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε η H παρουσιάζει

Ζωνταρίδης Νίκος

μόνο στο $x_0 = 1$ ολικό ελάχιστο, το $\min H(x) = H(1) = -2$.

ii) $$\begin{cases} 3\int_0^{\alpha-1} f(t)dt + \beta^2 - 3\beta + 2 = 0: \ (\Sigma_1) \\ \int_0^{\beta-1} f(t)dt + 3\alpha^2 - 9\alpha + 6 = 0: \ (\Sigma_2) \end{cases}$$

Από τις (Σ_1) και (Σ_2), με πρόσθεση κατά μέλη , έχουμε:

$$3\int_0^{\alpha-1} f(t)dt + 3\alpha^2 - 9\alpha + \int_0^{\beta-1} f(t)dt + \beta^2 - 3\beta + 8 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\left(\int_0^{\alpha-1} f(t)dt + \alpha^2 - 3\alpha\right) + \left(\int_0^{\beta-1} f(t)dt + \beta^2 - 3\beta\right) = -8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3H(\alpha) + H(\beta) = -8: \ (\Sigma).$$

Επειδή η $H(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση $x_0 = 1$, το $\min H(x) = H(1) = -2$, έπεται ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$H(x) \geq -2$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} H(\alpha) \geq -2 & , \ (\text{η ισότητα ισχύει μόνο για } \alpha = 1) \\ H(\beta) \geq -2 & , \ (\text{η ισότητα ισχύει μόνο για } \beta = 1) \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3H(\alpha) \geq -6 & , \ (\text{η ισότητα ισχύει μόνο για } \alpha = 1) \\ H(\beta) \geq -2 & , \ (\text{η ισότητα ισχύει μόνο για } \beta = 1) \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3H(\alpha) + H(\beta) \geq -8, \ (\text{η ισότητα ισχύει μόνο για } \alpha = \beta = 1).$$

Έτσι για να ισχύει η **(Σ)** πρέπει και αρκεί να είναι $\alpha = \beta = 1$. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι οι ισότητες (Σ_1) και (Σ_2) επαληθεύονται για $\alpha = \beta = 1$. Επομένως $(\alpha, \beta) = (1,1)$ είναι η λύση του δοθέντος συστήματος.

Ζαντάρίδης Νίκος

Ζαντάρίδης Νίκος