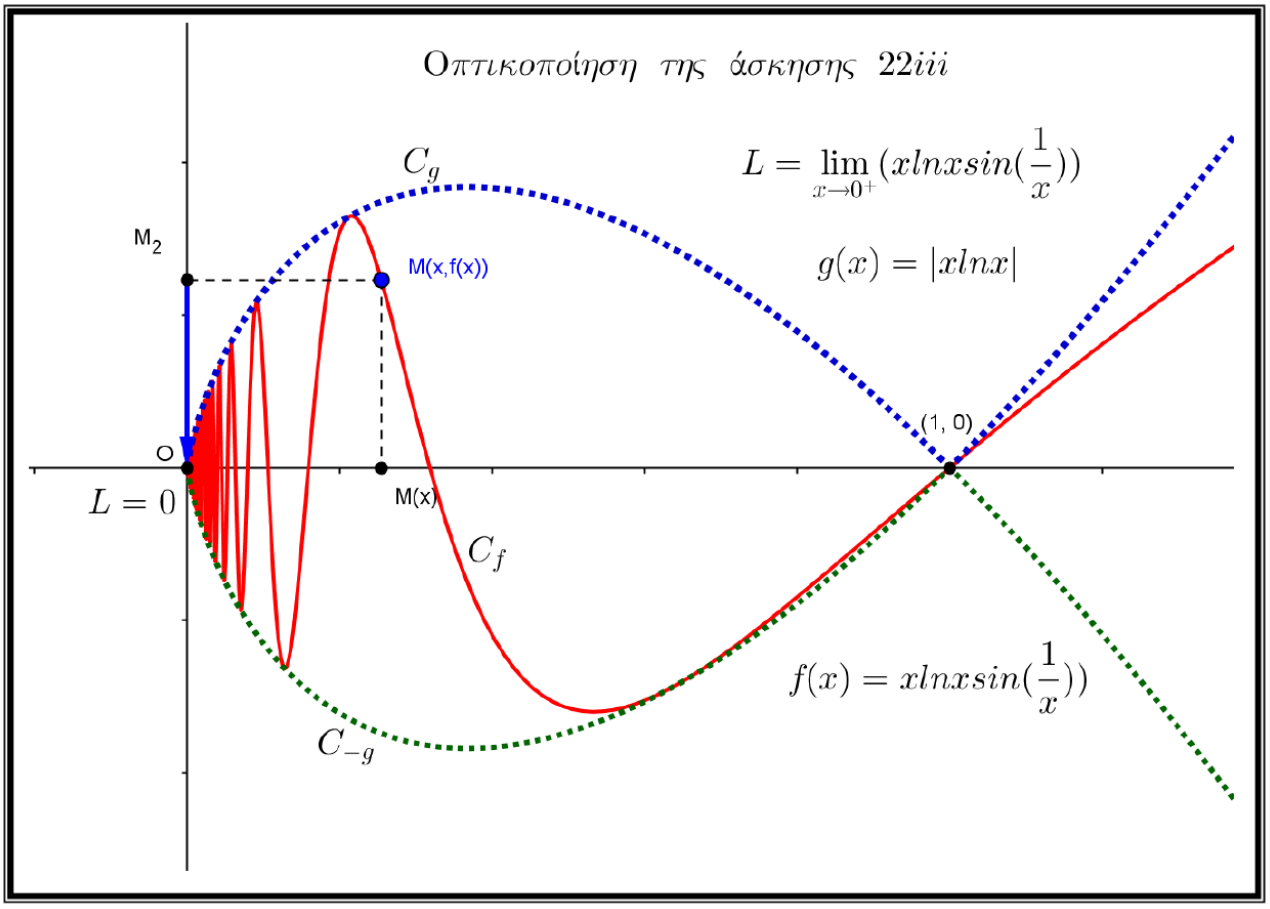
1)

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

ΤΑΞΗ ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

(ΘΕΩΡΙΑ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ- ΑΣΚΗΣΕΙΣ)

Ζανταρίδης Νικόλαος



Φεβρουάριος 2016

Εξώφυλλο, επιμέλεια:

Κώστας Δόρτσιος, Μαθηματικός

Πρόλογος

Έχοντας ως στόχο πάντοτε την προσφορά στους μαθητές μου και γενικότερα στον κάθε ενδιαφερόμενο με τα Μαθηματικά, αποφάσισα στις σελίδες που ακολουθούν να αναλύσω ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα που καθημερινά απασχολεί εκείνον που αναζητά και μελετά όρια συναρτήσεων.

Ειδικότερα η μελέτη αυτή στρέφεται σε γενικές γραμμές σ' εκείνες τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής που έχουν μορφή κλάσματος με αριθμητή και παρονομαστή γινόμενα παραγόντων που ο καθένας εξ αυτών έχει οριακή τιμή το μηδέν, όταν η μεταβλητή της συνάρτησης τείνει σε κάποιον αριθμό.

Πιστεύω ότι τέτοιες περιπτώσεις είναι συχνές και αποτελούν κάθε φορά σημείο δυσκολίας για τους μαθητές και όχι μόνο. Στην εργασία αυτή αποσαφηνίζεται ο τρόπος αντιμετώπισης και εμπλουτίζεται η εμπειρία μας με τις πολλές προτεινόμενες ασκήσεις. Ελπίζω οι σημειώσεις αυτές να βοηθήσουν τους μαθητές ώστε να φθάσουν στις εξετάσεις με αρκετά εφόδια και πλούσια εμπειρία στο θέμα αυτό.

Τέλος ευχαριστώ τον αγαπητό φίλο και συνάδελφο Κώστα Δόρτσιο, τ. Σχολικό Σύμβουλο Δυτικής Μακεδονίας που επιμελήθηκε ψηφιακά το κείμενο αυτό καθώς και το εξώφυλλό του.

Φεβρουάριος 2016

Ο συγγραφέας

Νίκος Ζανταρίδης

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

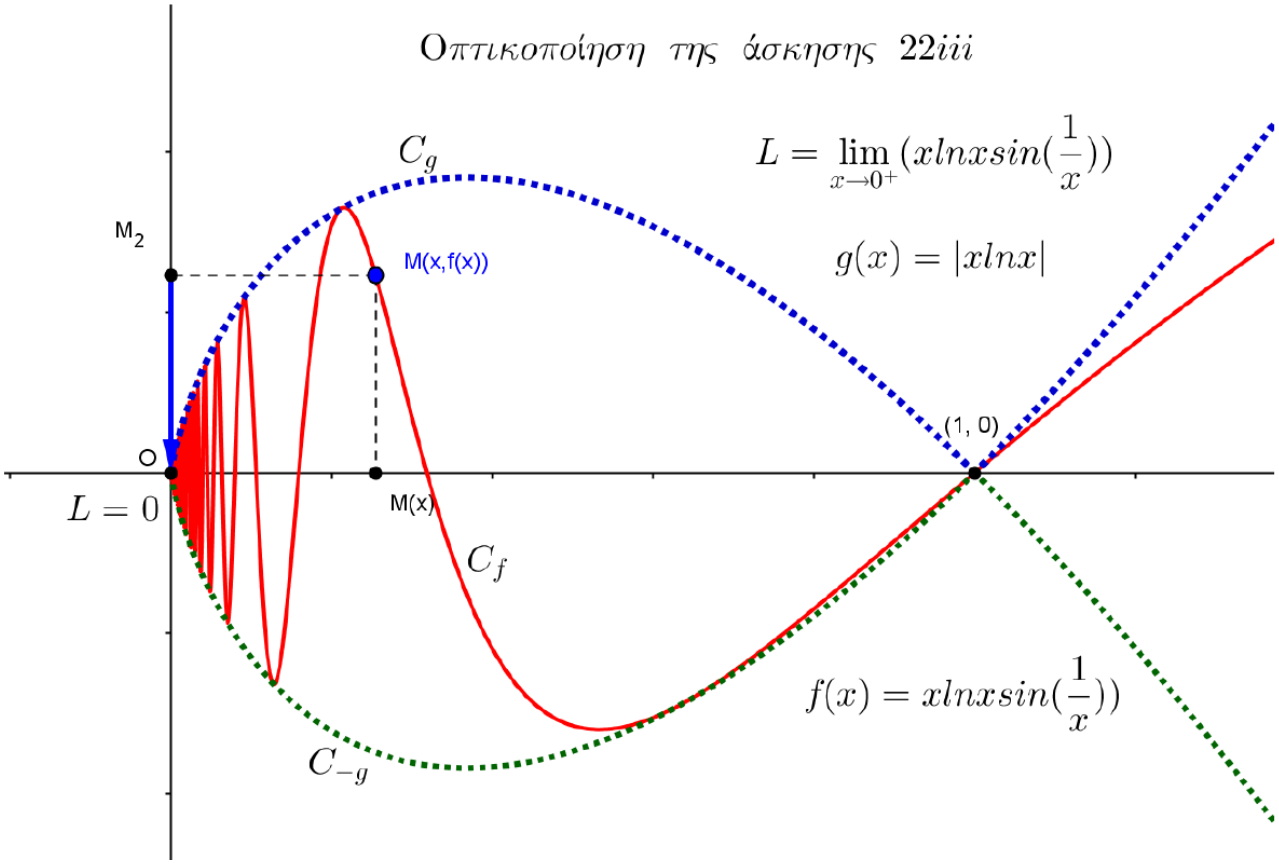
❖ ΤΑΞΗ ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ζανταρίδης Νικόλαος

Μαθηματικός – Φροντιστής

Έδεσσα

e-mail: nikoszantar@yahoo.gr



N.ZANTAPIAHΣ

Ορισμός	Έστω μια συνάρτηση f, k φορές παραγωγίσιμη ($k \in \mathbb{N}^*$) στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, όπου $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει: $$\lim_{x \to x_0} f^{(0)}(x) = \lim_{x \to x_0} f^{(1)}(x) = \ldots = \lim_{x \to x_0} f^{(k-1)}(x) = 0$$ (όπου $f^{(0)}(x) = f(x)$) και $\lim_{x \to x_0} f^{(k)}(x) \neq 0$, τότε θα λέμε ότι η f είναι k τάξης μηδενισμού στο x_0.
1.	

Ορισμός	Έστω μια συνάρτηση f, k φορές παραγωγίσιμη στο (α, x_0) *(αντιστοίχως* k *φορές παραγωγίσιμη στο* (x_0, β)*)*, $x_0 \in \mathbb{R}$, $(k \in \mathbb{N}^*)$. Αν ισχύει: $$\lim_{x \to x_0^-} f^{(0)}(x) = \lim_{x \to x_0^-} f^{(1)}(x) = \ldots = \lim_{x \to x_0^-} f^{(k-1)}(x) = 0$$ *(αντιστοίχως* $\lim_{x \to x_0^+} f^{(0)}(x) = \lim_{x \to x_0^+} f^{(1)}(x) = \ldots = \lim_{x \to x_0^+} f^{(k-1)}(x) = 0$*)* και είναι $\lim_{x \to x_0^-} f^{(k)}(x) \neq 0$ (αντιστοίχως $\lim_{x \to x_0^+} f^{(k)}(x) \neq 0$), τότε θα λέμε ότι η f είναι k τάξης μηδενισμού στο x_0 από αριστερά *(αντιστοίχως* k *τάξης μηδενισμού στο* x_0 *από δεξιά).*
2.	

Πρόταση	Αν η συνάρτηση f είναι k τάξης μηδενισμού στο $x_0 \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}^*$), τότε ισχύει: $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^k} = \begin{cases} \frac{1}{k!} \lim_{x \to x_0} f^{(k)}(x) & , \text{αν } \lim_{x \to x_0} f^{(k)}(x) \in \mathbb{R}^* \\ +\infty & , \text{αν } \lim_{x \to x_0} f^{(k)}(x) = +\infty \\ -\infty & , \text{αν } \lim_{x \to x_0} f^{(k)}(x) = -\infty \end{cases}$$ Η παραπάνω πρόταση ισχύει και για πλευρικά όρια.

Βασικά όρια

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$	2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\frac{1}{2}$
3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}=\frac{1}{6}$	4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x}=\alpha$, $(\alpha\in\mathbb{R})$
5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=e$	6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$
7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{6}$	8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\ldots-\frac{x^n}{n!}}{x^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}$
9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$	10) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\frac{1}{e}$
11) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^\alpha\ln x)=0$, $(\alpha>0)$	12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$, $(\alpha\in\mathbb{R})$
13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$, $(\alpha>0)$	14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}=0$

Βασικές ανισότητες

1) $|\eta\mu x|\le|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν $x=0$).

2) $\ln x\le x-1$, για κάθε $x>0$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$).

3) $e^x\ge x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν $x=0$).

Απόδειξη της ανισότητας 3

Είναι γνωστό ότι για κάθε $\mathbf{x>0}$ ισχύει $\mathbf{\ln x \le x-1}$ $\mathbf{:(1)}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\mathbf{x=1}$.

Από την $\mathbf{(1)}$ θέτοντας όπου $\mathbf{x}$ το $\mathbf{e^x}$ (είναι $\mathbf{e^x>0}$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$) έχουμε ότι για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\mathbf{\ln\left(e^x\right)\le e^x-1 \Rightarrow x\le e^x-1 \Rightarrow e^x\ge x+1}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\mathbf{e^x=1 \Leftrightarrow \boxed{x=0}}$.

Άρα για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$ ισχύει $\mathbf{e^x\ge x+1}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\mathbf{x=0}$.

Εύρεση ορίων της μορφής:

$$\mathbf{\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)}{g_1(x)g_2(x)\dots g_k(x)}},$$

με

$$\mathbf{\lim_{x\to x_0} f_1(x)=\lim_{x\to x_0} f_2(x)=\dots=\lim_{x\to x_0} f_n(x)=0}$$

και

$$\mathbf{\lim_{x\to x_0} g_1(x)=\lim_{x\to x_0} g_2(x)=\dots=\lim_{x\to x_0} g_k(x)=0}$$

Οδηγίες

Για την εύρεση ορίων της μορφής: $\mathbf{\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)}{g_1(x)g_2(x)\dots g_k(x)}}$,

με

$$\mathbf{\lim_{x\to x_0} f_1(x)=\lim_{x\to x_0} f_2(x)=\dots=\lim_{x\to x_0} f_n(x)=0}$$

και

$$\mathbf{\lim_{x\to x_0} g_1(x)=\lim_{x\to x_0} g_2(x)=\dots=\lim_{x\to x_0} g_k(x)=0},$$

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΑΗΣ

βρίσκουμε αρχικά την τάξη μηδενισμού στο $\mathbf{x_0}$, των συναρτήσεων $\mathbf{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)}$ και $\mathbf{g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)}$ και στη συνέχεια δημιουργούμε παραστάσεις της μορφής $\dfrac{\mathbf{h(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^m}}$,

όπου $\mathbf{h(x)}$ κάθε μια από τις συναρτήσεις $\mathbf{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)}$ και $\mathbf{g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)}$ με τάξη μηδενισμού $\mathbf{m}$ στο $\mathbf{x_0}$ και βρίσκουμε κάθε όριο της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathbf{h(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^m}}$.

Στη συνέχεια γράφουμε:

$$\frac{\mathbf{f_1(x)f_2(x)\ \dots\ f_n(x)}}{\mathbf{g_1(x)g_2(x)\ \dots\ g_k(x)}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\mathbf{f_1(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^{r_1}}}\cdot\dfrac{\mathbf{f_2(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^{r_2}}}\cdot\dots\cdot\dfrac{\mathbf{f_n(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^{r_n}}}}{\dfrac{\mathbf{g_1(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^{m_1}}}\cdot\dfrac{\mathbf{g_2(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^{m_2}}}\cdot\dots\cdot\dfrac{\mathbf{g_k(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^{m_k}}}}\cdot\frac{\mathbf{(x-x_0)^{r_1+r_2+\dots+r_n}}}{\mathbf{(x-x_0)^{m_1+m_2+\dots+m_k}}}$$

$$=\frac{\dfrac{\mathbf{f_1(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^{r_1}}}\cdot\dfrac{\mathbf{f_2(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^{r_2}}}\cdot\dots\cdot\dfrac{\mathbf{f_n(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^{r_n}}}}{\dfrac{\mathbf{g_1(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^{m_1}}}\cdot\dfrac{\mathbf{g_2(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^{m_2}}}\cdot\dots\cdot\dfrac{\mathbf{g_k(x)}}{\mathbf{(x-x_0)^{m_k}}}}\cdot\mathbf{(x-x_0)^{(r_1+r_2+\dots+r_n)-(m_1+m_2+\dots+m_k)}}$$

όπου $\mathbf{r_1, r_2, \dots, r_n}$ οι τάξεις μηδενισμού στο x_0 των $\mathbf{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)}$ αντίστοιχα

και

$\mathbf{m_1, m_2, \dots, m_k}$ οι τάξεις μηδενισμού στο x_0 των $\mathbf{g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)}$ αντίστοιχα.

Τελικά βρίσκουμε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathbf{f_1(x)f_2(x)\ \dots\ f_n(x)}}{\mathbf{g_1(x)g_2(x)\ \dots\ g_k(x)}}$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων.

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

Για την εφαρμογή των παραπάνω είναι χρήσιμο να έχουμε υπόψη τα εξής:

Αν η $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{m}$ τάξης μηδενισμού στο $\mathbf{x_0}$ και $\mathbf{g}$ είναι $\mathbf{n}$ τάξης μηδενισμού στο $\mathbf{x_0}$ $\left(\mathbf{m,n \in N^*}\right)$, τότε:

1. για την $\left(\mathbf{f(x)}\right)^{\mathbf{k}}, \mathbf{k \in N^*}$ απαιτείται η δημιουργία της παράστασης:

$$\frac{\left(\mathbf{f(x)}\right)^{\mathbf{k}}}{\left(\mathbf{x-x_0}\right)^{\mathbf{mk}}}$$

2. για την $\mathbf{f(x)g(x)}$ απαιτείται η δημιουργία της παράστασης:

$$\frac{\mathbf{f(x)g(x)}}{\left(\mathbf{x-x_0}\right)^{\mathbf{m+n}}}$$

3. για την $\mathbf{f(x) \pm g(x)}$, με $m \neq n$, απαιτείται η δημιουργία της παράστασης :

$$\frac{\mathbf{f(x) \pm g(x)}}{\left(\mathbf{x-x_0}\right)^{\mathbf{r}}}, \text{ όπου } \mathbf{r = min\{m,n\}}.$$

Παράδειγμα 1.	Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2\right)^2\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)^3}{x^{10}\eta\mu^4 x}$.

ΛΥΣΗ

✓ Για τη συνάρτηση $\mathbf{f_1(x) = x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x - 2}$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2\right) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} f_1'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2x-2\eta\mu x\right) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} f_1''(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2-2\sigma\upsilon\nu x\right) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} f_1'''(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2\eta\mu x\right) = 0$

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

- $\lim\limits_{x\to 0} f_1^{(4)}(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2\sigma\upsilon\nu x) = 2 \neq 0$

Άρα, η συνάρτηση $f_1(x) = x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x - 2$ είναι 4^{ης} τάξης μηδενισμού στο $x_0 = 0$. Επομένως για να εξουδετερωθεί ο "μηδενισμός" της $f_1(x)$ στο $x_0 = 0$, απαιτείται η δημιουργία της παράστασης $\frac{f_1(x)}{x^4} = \frac{x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x - 2}{x^4}$, για την οποία έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x - 2}{x^4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x - 2\right)'}{\left(x^4\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - 2\eta\mu x}{4x^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(2x - 2\eta\mu x\right)'}{\left(4x^3\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\sigma\upsilon\nu x}{12x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(2 - 2\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\left(12x^2\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu x}{24x} = \frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = \frac{1}{12}\cdot 1 = \frac{1}{12}$$

✓ Για τη συνάρτηση $f_2(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 0}(1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} f_2'(x) = \lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} f_2''(x) = \lim\limits_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu x) = 1 \neq 0$

Επομένως η συνάρτηση $f_2(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x$ είναι 2^{ης} τάξης μηδενισμού στο $x_0 = 0$. Έτσι για να εξουδετερωθεί ο "μηδενισμός" της $f_2(x)$ στο $x_0 = 0$, απαιτείται η δημιουργία της παράστασης $\frac{f_2(x)}{x^2} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$, για την οποία έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 - \sigma\upsilon\nu x\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2\right)^2\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)^3}{x^{10}\eta\mu^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\left(x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2\right)^2\cdot\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)^3}{\left(x^4\right)^2\cdot\left(x^2\right)^3}}{\dfrac{x^{10}\eta\mu^4 x}{x^{14}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2}{x^4}\right)^2\left(\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)^3}{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^4}=\frac{\left(\dfrac{1}{12}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}{1^4}=\frac{1}{1132}$$

Παράδειγμα	Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x\right)\left(x^3-\eta\mu^3 x\right)}{\left(e^x+e^{-x}-x^2-2\right)^2\eta\mu x}$.
2.	

ΛΥΣΗ

Είναι:

$$\frac{\left(x^2\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x\right)\left(x^3-\eta\mu^3 x\right)}{\left(e^x+e^{-x}-x^2-2\right)^2\eta\mu x}=$$

$$=\frac{\left(x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\right)\left(x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)\left(x-\eta\mu x\right)\left(x^2+x\eta\mu x+\eta\mu^2 x\right)}{\left(e^x+e^{-x}-x^2-2\right)^2\eta\mu x}$$

- Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f_1(x)=x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$ είναι $1^{ης}$ τάξης μηδενισμού στο $x_0=0$.

  Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)'}{(x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{1}=\lim_{x\to 0}\left(2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x\right)=2$$

- Η συνάρτηση $f_2(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$ είναι $3^{ης}$ τάξης μηδενισμού στο $x_0=0$.

  Είναι:

Ν.ΖΑΝΤΑΡΗΣ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\right)'}{\left(x^3\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\eta\mu x}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=-\frac{1}{3}\cdot 1=-\frac{1}{3}$$

- Η συνάρτηση $f_3(x)=x-\eta\mu x$ είναι 3^{ης} τάξης μηδενισμού στο $x_0=0$.

  Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\eta\mu x\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}=$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}$$

- Οι συναρτήσεις x^2, $x\eta\mu x$ και $\eta\mu^2 x$ είναι 2^{ης} τάξης μηδενισμού στο $x_0=0$.

  Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x\eta\mu x+\eta\mu^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right)=1+1+1^2=3$$

- Η συνάρτηση $f_4(x)=e^x+e^{-x}-x^2-2$ είναι 4^{ης} τάξης μηδενισμού στο $x_0=0$.

  Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{x^4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-x^2-2\right)'}{\left(x^4\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{4x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{\left(4x^3\right)'}=$$

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{12x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(12x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{24x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(24x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{24}=\frac{1}{12}$$

- Η συνάρτηση $f_5(x)=\eta\mu x$ είναι 1ης τάξης μηδενισμού στο $x_0=0$.

  Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

Έτσι, κοντά στο $x_0=0$ έχουμε:

$$\frac{\left(x^2\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x\right)\left(x^3-\eta\mu^3x\right)}{\left(e^x-e^{-x}-x^2-2\right)^2\eta\mu x}=$$

$$=\frac{\left(x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\right)\left(x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)\left(x-\eta\mu x\right)\left(x^2+x\eta\mu x+\eta\mu^2x\right)}{\left(e^x-e^{-x}-x^2-2\right)^2\eta\mu x}$$

$$=\frac{\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\frac{x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{x}\cdot\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\frac{x^2+x\eta\mu x+\eta\mu^2x}{x^2}}{\left(\frac{e^x-e^{-x}-x^2-2}{x^4}\right)^2\cdot\frac{\eta\mu x}{x}}$$

Οπότε: $\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x\right)\left(x^3-\eta\mu^3x\right)}{\left(e^x-e^{-x}-x^2-2\right)^2\eta\mu x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\frac{x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{x}\cdot\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\frac{x^2+x\eta\mu x+\eta\mu^2x}{x^2}}{\left(\frac{e^x-e^{-x}-x^2-2}{x^4}\right)^2\cdot\frac{\eta\mu x}{x}}=$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 2\cdot\frac{1}{6}\cdot 3}{\left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot 1}=-\frac{144}{3}=-48$$

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

Προτεινόμενες ασκήσεις στα όρια

1) Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot f(x)-\eta\mu x}{x^2}=2$,να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)+\eta\mu^2 x+x\eta\mu(2x)}{1-\sigma\upsilon\nu^4 x}$

2) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\left|xf(x)-x^2-|x|\right|\le x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3) • Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=2$.

Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(8x)}{f(x)}$ και να δείξετε ότι: $15\left(f(x)\right)^2<f(2x)f(8x)<17\left(f(x)\right)^2$ κοντά στο $x_0=0$.

4) Για τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ και είναι $f(x),g(x)>0$ κοντά στο x_0. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(f(x)\right)^2+\left(g(x)\right)^2}{f(x)+g(x)}=0.$

5) Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^2)}{f(x)}=1$, $f(0)=0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^3)}{f(x^2)}$.

6) Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\left(f(x)\right)^3+f(x)\right)=2$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

N.ZANTIOTAKIS

7) Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $|x-2|f(x)\geq \eta\mu x$, $\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$.

1. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$.

2. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left|3f(x)-2(f(x))^2\right|-f(x)\eta\mu(f(x))}{(f(x))^2+\sigma\upsilon\nu^2(f(x))}$.

8) Να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x\sigma\upsilon\nu x}{3+2\eta\mu x}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x+1}-e^x\eta\mu x\right)$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x^4\eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right)+\sigma\upsilon\nu x}{x^3+x^2\eta\mu^2 x}$

9) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=3$.

Να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(f(x))^2+3f(x)+5}-f(x)\right)$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu(f(x))}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(2x)-2f(x))$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f(x)}-e^{2x}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f(x+1)}-e^{f(x)}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(f(3x))^2+xf(x)}{x^2+(f(x))^2}$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(f(x))^2-4x^2}{x}$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(f(x))^2+5x^2}-3x\right)$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{2x}+2e^{f(x)}}{e^{2x}+4e^{f(x)+3}}$

Αν επιπλέον η f είναι περιττή, να βρείτε τα όρια:

13. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

14. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(f(x))}{x}$

ΝΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

10) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x+y)=f(x)f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ και είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$.

1. Να δείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

ii. $f(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

iii. $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

iv. $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

2. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)-f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\right)\right]$.

11) • Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)+e^{f(x)}=x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

1. Να βρεθεί το πρόσημο της f.

2. Να δειχθεί ότι $\ln\left(\dfrac{x+2}{2}\right)<f(x)<\ln(x+1)$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

3. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{f(x)}}{x}$.

4. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\ln x}$.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+4x+16}-\dfrac{x^2+3}{x+3}$.

1. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0>0$, ώστε $f(x_0)=4{,}999$.

13)

1. Να αποδειχθεί ότι: $|\,\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta\,|\le|\alpha-\beta|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu\left(\sqrt{x^2+\eta\mu x}-x\right)\right]$.

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΑΗΣ

14) Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=(\eta\mu x)^{2017}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι: $|f(\alpha)-f(\beta)|\le|\alpha-\beta|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
2. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(f\left(\sqrt{x^4+|x|+1}\right)\right)-f\left(f\left(x^2\right)\right)\right]$.

15) • Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\lambda}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$, $x\ge1,(\lambda\in\mathbb{R})$.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

16) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(x^3-\eta\mu^3x\right)\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{x^2(1-\sigma\upsilon\nu x)^2\eta\mu x}$.

17) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{\eta\mu^2x}}{x^4}$.

18) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\eta\mu x-xe^{\eta\mu x}}{x^3}$.

19) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $(\varepsilon):y=2x+3$, τότε:

1. Να βρείτε την ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:
$$g(x)=\frac{f(x)f(2x)}{x}\ ,\ x\ne0.$$
2. Να βρείτε την ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης
$$h(x)=(fof)(x)\ ,\ x\in\mathbb{R}.$$

20) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

21) Αν η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχει, το $+\infty$, ασύμπτωτη την ευθεία $(\varepsilon):y=3x+1$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, τότε να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{f(t)}{x}dt.$

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

22) Να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu x-2x\right)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-x^2\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

23) Να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^9+(1-x)^9}{x^8}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\int_0^x e^t\eta\mu t\,dt\right)$

24) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f^2(t)dt\cdot\int_0^x f(t^2)dt}{x^4\cdot\int_0^x f(t)dt}$$

25) 1) Να δειχθεί ότι $\ln x\geq\frac{x-1}{x}$, για κάθε $x>0$.

2) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$.

26) Η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και αύξουσα στο $[0,+\infty)$, με $f(0)=1$. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt$.

27) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{3x}\frac{\sigma\upsilon\nu t}{t}dt$.

28) Αν $f(x)=e^{\sqrt{x}}, x>0$, να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

29) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, με $f'(0)\neq 0$ και F είναι μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.

1. Να αποδειχθεί ότι κοντά στο $x_0=0$ είναι: $F(x)\neq F(0)+f(0)x$.

2. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(f(x+t)-f(t)\right)dt}{F(x)-f(0)x-F(0)}$.

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΑΗΣ

30) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'\left(x+f(x)h\right)-f'(x)}{h}=\left(f'(x)\right)^2,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και είναι:

$$f(0)=1,\ f'(0)=2,$$

τότε να βρείτε τον τύπο της f.

31) Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει :

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{f(x+h)-f(x)}-1}{h}=(x+1)^2e^{-f(x)}-1,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και είναι $f(0)=0$.Να βρείτε τον τύπο της f.

32) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν:

- $f(0)=f'(0)=1$
- $f(x)>0$ **και** $f''(x)>0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\left(f(\alpha)\right)^x+\left(f''(\alpha)\right)^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=f'(\alpha)$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$

Να βρείτε την f.

33) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή και είναι:

$$f(0)=f'(0)=f''(0)-1=0.$$

1. Να δείξετε ότι: $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 0.$
2. Να βρεθούν τα όρια:

   i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\ln|x|\right)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(f(x)\right)}{\ln|x|}$

N.ZANTARIAΣ

34) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$f(x)+2f(x+1)+3f(2x)=9x+14$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η C_f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη.

1. Να βρεθεί η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
2. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$, $k\in\mathbb{R}$.

35) Αν η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(f(x+hx)-f(x)\right)f\left(\dfrac{h+1}{x}\right)}{h^2+xh}=-\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=1$, τότε να βρείτε την f.

36) Να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\ln x\right]$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(e^{x+1}+2\right)\right)$

37) Οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0\in\mathbb{R}$ με $g'(x_0)\neq 0$ και $f(x_0)=g(x_0)=0$.

1. Να δείξετε ότι: $g(x)\neq 0$ κοντά στο x_0.
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

38) • Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και είναι $f(0)=f'(0)=1$. Ακόμη ισχύει $f'(x)\left(f'(x+y)-f'(x)\right)>0$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ με $y>0$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $\mathbb{R}$.
2. Να βρεθούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt$ ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{f(t)-1}{t^2}dt$

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

39) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{x}\right)+x\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x+1}$.

40) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f(0)=f'(0)=1$.

Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+2x)\left(f\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right)-1\right)+x^4\left(1-\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)}{x^2+2}$.

41) • Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $(f(x))^{2015}+f(x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
2. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.
3. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
4. Να δείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\sqrt[2015]{x}}=1$

42) Αν η συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=\lambda\in\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f'(x_0)=0$.

43) • Αν η συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=\pm\infty$, να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f'(x_0)=0$.

44) Να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to0^+}(x^x)$
2. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-1}{x}$

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

45) Να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^5+\left(x^2+x+1\right)^3-2}{\left(x^2+x+1\right)^3+2\left(x^2+x+1\right)^2-3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2-2}{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^5-1}$

46) Να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\eta\mu^2 x+x^2}}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3\eta\mu x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x+x}{\eta\mu x-x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x-x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{x\left(\eta\mu x-x\right)}$

47) Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+\alpha x+\beta}{x^3-1}=2$.

48) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\left(\alpha^2+9\beta^2\right)e^x+5, x\in(0,+\infty)\\ \dfrac{4\alpha\eta\mu x-3\beta\eta\mu(2x)}{x}, x\in(-\infty,0)\end{cases}$

Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

N.ZANTARIAHΣ

49) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,\ \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=2x_0\ ,\forall x_0\in\mathbb{R}$

50) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2-1}=2$.Να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-1}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(f(x))^2-5f(x)+2}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(f(x))^3-1}{f(x)-1}$,(δινεται ότι $f(x)\neq 1$ κοντά στο $x_0=1$)

51) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x^2}{x-2}=2$. Να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{(f(x))^2+9}-5}{x-2}$
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left|(f(x))^2-3f(x)\right|-4}{x-2}$

ΝΖΑΝΤΑΡΙΑΗΣ

52) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left|xf(x)-\eta\mu 2x\right|\le \eta\mu^2 x, \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

1. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Να δείξετε ότι: $f(x)>1,99$ κοντά στο $x_0=0$.

3. Αν είναι $f(x)\ne 2$ κοντά στο $x_0=0$, να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-\eta\mu^2 x}{x^2+2\eta\mu^2 x}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(f(x))^2+f(x)+3}-3}{(f(x))^3-8}$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\left[(f(x)-2)\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|(f(x))^2-3f(x)\right|-2}{\left|f(x)-3\right|-1}$

53) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)+f(2x)\ge 3x-\eta\mu^2 x, \forall x\in\mathbb{R}$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\alpha\in\mathbb{R}$, τότε:

1. Να δειχθεί ότι $\alpha=1$

2. Να δειχθεί ότι $\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{999}{1000}$ κοντά στο $x_0=0$.

54) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=3$.

1. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(8x)}{f(x)}$

2. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(2x)>2f(x)$, κοντά στο $x_0=0$.

ii. $f(2x)f(8x)>80(f(x))^2$, κοντά στο $x_0=0$

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

55) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να βρεθούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(4x)}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{f(x)}$.

56) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x^2+\alpha x+1}{x^2-2x+1}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

57)

1. Αν για τη την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^3=8$, να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=2$

2. Αν για τη την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^2=0$, να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

3. Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ και η f είναι περιττή, να εξεταστεί αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu\left(f(x)\right)\eta\mu x\right)$.

58) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με:

$$f(0)=f(1)=0\,,\ f'(0)=f'(1)=2.$$

1. Να δειχθεί ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$, ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

2. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(f\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\right]$.

3. i. Να δειχθεί ότι $f(x)\neq\eta\mu x$ κοντά στο $x_0=0$.

ii. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{f(x)}-e^{\eta\mu x}}{x}$.

59) Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε να είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\alpha-\beta x}{x^2}\in\mathbb{R}$.

N.ZANTARIΔΗΣ

60) • Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{f(x+h)-f(x)}-1}{h}=1 \text{ και είναι } f(0)=2016.$$

Να βρεθεί η f.

61) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n-(\eta\mu x)^n}{x^{n+2}}$, $n\in N^*$

62) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

63) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{x\eta\mu x}}{x^4}$

64) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=2016x+2017$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

1. Να δειχθεί ότι $f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
2. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$.
3. Να δειχθεί ότι $f(x+1)-f(x)<2016$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
4. Να δειχθεί ότι κοντά στο $+\infty$ ισχύει $\dfrac{2015}{2016}<\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)-f(x-1)}<\dfrac{2016}{2015}$.

65) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $x^2f(x)\geq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

1. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$
2. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(f(x))^2+f(x)+1}{2(f(x))^2+3}$.
3. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu(f(x))\right)$.

66) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ και είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=2016$

1. Να δειχθεί ότι $f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.
2. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.
3. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΑΗΣ

67) • Η συνάρτηση $\mathbf{f:[0,1]\to\mathbb{R}}$ είναι παραγωγίσιμη με την $\mathbf{f'}$ συνεχή και ισχύει $\mathbf{f'(x)>0}$ για κάθε $\mathbf{x\in[0,1]}$.

Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{1-x}{f(1)-f(t)}dt$$

68) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}\eta\mu t dt$.

69) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^4\left(1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)\right]$.

70) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right)+x\sigma\upsilon\nu x+1}{x^2+1}$.

71) • Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}}$ έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\mathbf{(\varepsilon): y=x+1}$, να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f(2x)f(3x)-6x^3}{x^2}.$$

72) Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ ισχύει:

$$f'(x)=x^2\eta\mu\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right), x\in\mathbb{R}.$$

Να βρεθεί το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$

73)Για την περιττή συνάρτηση $\mathbf{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ ισχύει **:**

$x^2f(x)\geq|x|\left(\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x}\right)$ **,** για κάθε $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$.

Να εξεταστεί αν η $\mathbf{f}$ έχει όριο στο $x_0=0$.

74)Η συνάρτηση $\mathbf{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\mathbf{x_0=0}$, με $f(0)=0$ και $f'(0)=1$.

α)ν.δ.ο. $f(x)\neq 0$, κοντά στο $x_0=0$

β) Να βρεθεί το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-f(x)-1}{x^2}$

ΝΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

N.ZANTAPIAHΣ