45. ΠΟΤΕ ΣΥΝΑΝΤΩΝΤΑΙ (ΙΙ);

Έστω δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις $x_1=A_1\eta\mu(\omega_1 t+\frac{\pi}{6})$ και $x_2=A_2\eta\mu(\omega_2 t+\frac{7\pi}{6})$ με $A_1=A_2=A$ οι οποίες πραγματοποιούνται ξεχωριστά η μια από την άλλη στην ίδια διεύθυνση γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Ποια χρονική στιγμή συναντιούνται τα σώματα για πρώτη φορά;

Συνοπτική λύση:

Για τη συνάντηση ισχύει $x_1=x_2\Rightarrow A_1\eta\mu(\omega_1 t+\frac{\pi}{6})=A_2\eta\mu(\omega_2 t+\frac{7\pi}{6})\Rightarrow$

$\Rightarrow \eta\mu(\omega_1 t+\frac{\pi}{6})=\eta\mu(\omega_2 t+\frac{7\pi}{6})\Rightarrow\omega_1 t+\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\omega_2 t+\frac{7\pi}{6}$ (1) ή

$\omega_1 t+\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\pi-\omega_2 t-\frac{7\pi}{6}$ (2).

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$(\omega_1-\omega_2)\cdot t=2\kappa\pi+\pi\Rightarrow t_3=\frac{(2\kappa+1)\pi}{\omega_1-\omega_2}$ (3) και

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$(\omega_1+\omega_2)\cdot t=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow t_4=\frac{(6\kappa-1)\pi}{3(\omega_1+\omega_2)}$ (4)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

1) Για κ=1 και $\omega_1=\omega_2=\omega$ από την (4) προκύπτει $t=\frac{5\pi}{6\omega}$.

2) Το x_2 βρίσκεται για πρώτη φορά στο $x_2=-A$ τη χρονική στιγμή $t=\frac{T_2}{6}$, τότε

- αν θέλουμε η συνάντηση να γίνει σε $0\le t\le\frac{T_2}{6}$ θα έχουμε:

(3)$\Rightarrow$ $t_3=\frac{(2\kappa+1)\pi}{\omega_1-\omega_2}\le\frac{T_2}{6}\Rightarrow\frac{(2\kappa+1)\pi}{\omega_1-\omega_2}\le\frac{\pi}{3\omega_2}\Rightarrow\omega_1\ge(6\kappa+4)\omega_2$, για κ=0$\Rightarrow$ $\omega_1\ge 4\omega_2$. Για $\omega_1=4\omega_2$ και κ=0 έχουμε ότι $t_3=\frac{\pi}{3\omega_2}$ ή $t_3=\frac{T_2}{6}$

(4) $t_4=\frac{(6\kappa-1)\pi}{3(\omega_1+\omega_2)}\le\frac{T_2}{6}\Rightarrow\frac{(6\kappa-1)\pi}{3(\omega_1+\omega_2)}\le\frac{\pi}{3\omega_2}$,

για κ=1$\Rightarrow$ $\omega_1\ge 4\omega_2$. Τελικά

$$\boldsymbol{\omega_1\ge 4\omega_2.}$$

- αν θέλουμε η συνάντηση να γίνει σε $\frac{T_2}{6}\le t\le\frac{5T_2}{12}$ θα έχουμε:

(3)$\Rightarrow$ $t_3=\frac{(2\kappa+1)\pi}{\omega_1-\omega_2}>\frac{T_2}{6}\Rightarrow\frac{(2\kappa+1)\pi}{\omega_1-\omega_2}>\frac{\pi}{3\omega_2}\Rightarrow\omega_1<(6\kappa+4)\omega_2$, για κ=0$\Rightarrow$ $\omega_1<4\omega_2$ και

$t_3 = \frac{(2\kappa+1)\pi}{\omega_1-\omega_2} \le \frac{5T_2}{12} \Rightarrow \frac{(2\kappa+1)\pi}{\omega_1-\omega_2} \le \frac{5\pi}{6\omega_2} \Rightarrow$ για $\kappa=0$, $\omega_1 \ge \frac{11}{5}\omega_2$ ή $\omega_1 \ge 2{,}2\cdot\omega_2$

(4) $t_4 = \frac{(6\kappa-1)\pi}{3(\omega_1+\omega_2)} \ge \frac{T_2}{6} \Rightarrow \frac{(6\kappa-1)\pi}{3(\omega_1+\omega_2)} \ge \frac{\pi}{3\omega_2}$,

για $\kappa=1 \Rightarrow \omega_1<4\omega_2$

$t_4 = \frac{(6\kappa-1)\pi}{3(\omega_1+\omega_2)} \le \frac{5T_2}{12} \Rightarrow \frac{(6\kappa-1)\pi}{3(\omega_1+\omega_2)} \le \frac{5\pi}{6\omega_2} \Rightarrow$ για $\kappa=1$ ότι $\omega_1 \ge \omega_2$ άρα τελικά

$\omega_2 \le \omega_1 < 4\omega_2$

- αν θέλουμε η συνάντηση να γίνει σε $t > \frac{5T_2}{12}$ θα έχουμε:

(3)$\Rightarrow$ $t_3 = \frac{(2\kappa+1)\pi}{\omega_1-\omega_2} > \frac{5T_2}{12} \Rightarrow \frac{(2\kappa+1)\pi}{\omega_1-\omega_2} > \frac{5\pi}{6\omega_2} \Rightarrow$ για $\kappa=0$, $\omega_1 < \frac{11}{5}\omega_2$ ή $\omega_1 < 2{,}2\cdot\omega_2$

(4) $t_4 = \frac{(6\kappa-1)\pi}{3(\omega_1+\omega_2)} > \frac{5T_2}{12} \Rightarrow \frac{(6\kappa-1)\pi}{3(\omega_1+\omega_2)} > \frac{5\pi}{6\omega_2} \Rightarrow$ για $\kappa=1$ ότι $\omega_1<\omega_2$ άρα τελικά

$\omega_1 < \omega_2$