47. Σύνθεση ταλαντώσεων.

Σώμα Σ πραγματοποιεί α.α.τ με εξίσωση, $x_1=0{,}4\cdot ημ(10t+\frac{5π}{12})\cdot συν(10t+\frac{5π}{12})$ (S.I), γύρω από τη θέση ισορροπίας του.
Τη χρονική στιγμή t=0 το Σ αρχίζει να πραγματοποιεί και μια εξαναγκασμένη ταλάντωση στην ίδια διεύθυνση γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξίσωση, $x_2=0{,}2\cdot[συν^2(10t+\frac{5π}{12})- ημ^2(10t+\frac{5π}{12})]$ (S.I).
Πως μεταβάλλεται με το χρόνο η επιτάχυνση του $Σ_1$;

Συνοπτική λύση:

Ισχύει ημ2α=2ημα·συνα, άρα $x_1=0{,}2\cdot ημ(20t+\frac{5π}{6})$ (S.I) και $συν2α=συν^2α-ημ^2α$, άρα έχουμε $x_2= 0{,}2\cdot συν(20t+\frac{5π}{6})$ ή $x_2= 0{,}2\cdot ημ(20t+\frac{5π}{6}+\frac{π}{2})\Rightarrow x_2= 0{,}2\cdot ημ(20t+\frac{4π}{3})$ (S.I).
Για την απομάκρυνση του Σ γύρω από τη θέση ισορροπίας του ισχύει $x=x_1+x_2= A\cdot ημ(ωt+θ)$ με $θ=π+θ'$.

1^{ος} τρόπος:
Από το διανυσματικό διάγραμμα (Γεωμετρική κατασκευή του Fresnel):

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=0{,}2\cdot\sqrt{2}$ m

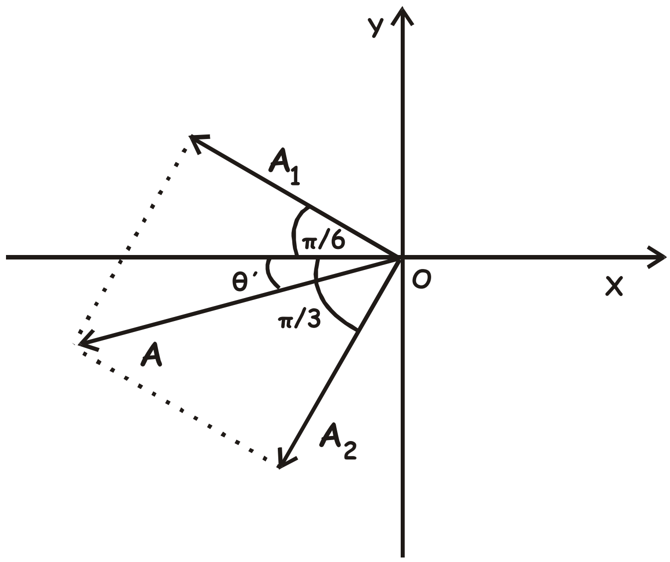
με $εφ(θ'+\frac{π}{6})=\frac{A_2}{A_1}=1$ ή $θ'+\frac{π}{6}=\frac{π}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow θ'=\frac{π}{12}$ rad.

Τελικά έχουμε $x=A\cdot ημ(ωt+π+θ')\Rightarrow$

$\Rightarrow x=0{,}2\cdot\sqrt{2}\cdot ημ(20t+\frac{13π}{12})$ και για την επιτάχυνση είναι $α=-ω^2\cdot x\Rightarrow$

$\Rightarrow α=-80\cdot\sqrt{2}\cdot ημ(20t+\frac{13π}{12})$ (S.I).



2^{ος} τρόπος:

Ακόμη ισχύει $x_1=0{,}2\cdot ημ(20t+\frac{5π}{6})$ και $x_2= 0{,}2\cdot ημ(20t+\frac{4π}{3})$ οπότε η διαφορά φάσης των δυο ταλαντώσεων είναι $Δφ=\frac{4π}{3}-\frac{5π}{6}=\frac{π}{2}$ rad. Τότε ισχύει $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2συνΔφ}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=0{,}2\cdot\sqrt{2}$ m

Ακόμη έχουμε $εφθ=\frac{A_2ημΔφ}{A_1+A_2συνΔφ}=\frac{A_2}{A_1}=1\Rightarrow θ=\frac{π}{4}$ rad. Τότε είναι x=A·ημ(ωt+$\frac{5\pi}{6}$+θ)$\Rightarrow$ x=0,2·$\sqrt{2}$·ημ(20t+$\frac{5\pi}{6}$+$\frac{\pi}{4}$)$\Rightarrow$ x=0,2·$\sqrt{2}$·ημ(20t+$\frac{13\pi}{12}$) (S.I).

3^{ος} τρόπος:

Για τις απομακρύνσεις ισχύει:

x_1=0,2·ημ(20t+$\frac{5\pi}{6}$) (S.I)

x_2= 0,2·ημ(20t+$\frac{4\pi}{3}$) (S.I).

και για την απομάκρυνση του Σ γύρω από τη θέση ισορροπίας του ισχύει
x=x_1+$x_2$$\Rightarrow$x= A·ημ(ωt+θ). Τότε για t=0 είναι

x_1=0,2·ημ($\frac{5\pi}{6}$)$\Rightarrow$ x_1=0,1m,

x_2= 0,2·ημ($\frac{4\pi}{3}$)$\Rightarrow$$x_2$=-0,1$\sqrt{3}$ m και

x= A·ημθ. Όμως ισχύει σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας ότι
x=x_1+$x_2$$\Rightarrow$ A·ημθ=0,1-0,1$\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ **A·ημθ=0,1(1-$\sqrt{3}$)** (1) με **ημθ<0**.

Για τις ταχύτητες ισχύει:

υ_1=4·συν(20t+$\frac{5\pi}{6}$) (S.I)

υ_2= 4·συν(20t+$\frac{4\pi}{3}$) (S.I).

και υ=υ_1+$\upsilon_2$$\Rightarrow$υ= ωA·συν(ωt+θ). Τότε για t=0 είναι

υ_1=4·συν($\frac{5\pi}{6}$)$\Rightarrow$ υ_1=-2$\sqrt{3}$ m/s,

υ_2= 4συν($\frac{4\pi}{3}$)$\Rightarrow$$\upsilon_2$=-2m/s και

υ= ωA·συνθ. Παρόμοια έχουμε υ=υ_1+$\upsilon_2$$\Rightarrow$ ωA·συνθ=-2$\sqrt{3}$-2$\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 20·A·συνθ=-2(1+$\sqrt{3}$)$\Rightarrow$ **A·συνθ=-0,1(1+$\sqrt{3}$)** (2) με **συνθ<0**.

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2), έχουμε εφθ=2-$\sqrt{3}$, με **π<θ<$\frac{3\pi}{2}$** rad άρα

θ=π+$\frac{\pi}{12}$$\Rightarrow$θ=$\frac{13\pi}{12}$ rad. Ακόμη (1) $\Rightarrow$ A^2·$ημ^2θ$=$0,1^2$(1-$\sqrt{3}$)^2 και (2) $\Rightarrow$
A^2·$συν^2θ$=$0,1^2$(1+$\sqrt{3}$)^2 με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε
A^2=$0,1^2$[(1-$\sqrt{3}$)^2+(1+$\sqrt{3}$)^2]$\Rightarrow$ A^2=$0,1^2$·8$\Rightarrow$ A=0,1·$\sqrt{8}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$A=0,2·$\sqrt{2}$. Τελικά προκύπτει x=0,2·$\sqrt{2}$·ημ(20t+$\frac{13\pi}{12}$) και α=-ω^2·x$\Rightarrow$

$\Rightarrow$α=-80·$\sqrt{2}$·ημ(20t+$\frac{13\pi}{12}$) (S.I).