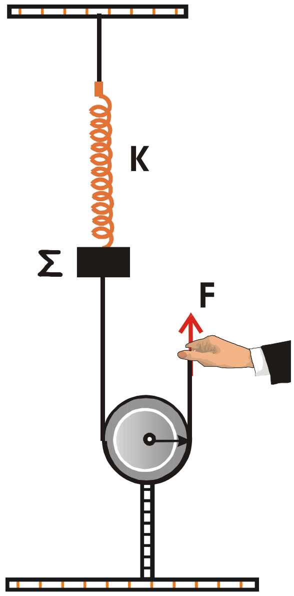
48. ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ.

Στη διάταξη του σχήματος δίνονται η σταθερά του ιδανικού ελατηρίου K=100N/m και ότι η μάζα του σώματος Σ είναι m=4Kg.Η τροχαλία θεωρείται αβαρής.



Το χέρι μας ασκεί περιοδική δύναμη F, και το σώμα Σ εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση συχνότητας $f_1=\frac{4}{2\pi}$ Hz και πλάτους A=4,4cm χωρίς αρχική φάση. Το σώμα κινούμενο δέχεται δύναμη αντίστασης $F_{αντ}= -b\cdot υ$ με σταθερά απόσβεσης $b=0,4Kg\cdot s^{-1}$.

α) Να γράψετε τις σχέσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας του ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο.

β) Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης F του διεγέρτη σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) Να υπολογίσετε τη δύναμη του διεγέρτη τη χρονική στιγμή $t=\frac{\pi}{12}$s, καθώς και το ρυθμό προσφερόμενης ενέργειας εκείνη τη στιγμή.

δ) Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης F του διεγέρτη σε συνάρτηση με το χρόνο όταν έχουμε συντονισμό και να υπολογίσετε το ρυθμό προσφερόμενης ενέργειας τη στιγμή $t=\frac{\pi}{15}$s.

Συνοπτική λύση:

α) Ισχύει x=Αημωt με $ω=2\pi\cdot f_1=4$rad/s, τότε έχουμε $x=4,4\cdot 10^{-2}ημ4t$. Ακόμη είναι $υ=17,6\cdot 10^{-2}\cdot συν4t$.

β) Ισχύει ότι $ΣF=m\cdot α\Rightarrow F+F_{αντ}+F_{επ}=m\cdot α\Rightarrow F-b\cdot υ-K\cdot x= -mω^2x\Rightarrow$
$F= b\cdot υ+K\cdot x-mω^2x\Rightarrow F= b\cdot ω\cdot A\cdot συνωt+(K-mω^2)\cdot A\cdot ημωt\Rightarrow$

$\Rightarrow F= b\cdot ω\cdot A\cdot(συνωt+\frac{K-mω^2}{b\cdot ω}\cdot ημωt)$ θέτουμε $εφθ=\frac{K-mω^2}{b\cdot ω}$ $(ω\neq 0)$ και έχουμε,

$F= b\cdot ω\cdot A\cdot(συνωt+εφθ\cdot ημωt)\Rightarrow F= b\cdot ω\cdot A\cdot(συνωt+\frac{ημθ}{συνθ}\cdot ημωt)\Rightarrow$

$\Rightarrow F=\frac{b\cdot ω\cdot A}{συνθ}\cdot(συνωt\cdot συνθ+ ημθ\cdot ημωt)\Rightarrow F= F_0\cdot συν(ωt-θ)$ με $F_0=\frac{b\cdot ω\cdot A}{συνθ}$.

Ακόμη, $εφ^2θ=\frac{1}{συν^2θ}-1\Rightarrow\frac{1}{συνθ}=\sqrt{1+εφ^2θ}$, άρα $F_0=b\cdot ω\cdot A\cdot\sqrt{1+εφ^2θ}\Rightarrow$

$\Rightarrow F_0=b\cdot ω\cdot A\cdot\sqrt{1+\left(\frac{K-mω^2}{b\cdot ω}\right)^2}\Rightarrow F_0=A\cdot\sqrt{b^2\cdot ω^2+\left(K-mω^2\right)^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow A=\frac{F_0}{\sqrt{b^2\cdot ω^2+\left(K-mω^2\right)^2}}$. Για $ω\to 0$ είναι $A=\frac{F_0}{K}$. Άρα η γραφική παράσταση δεν περνάει από το 0.

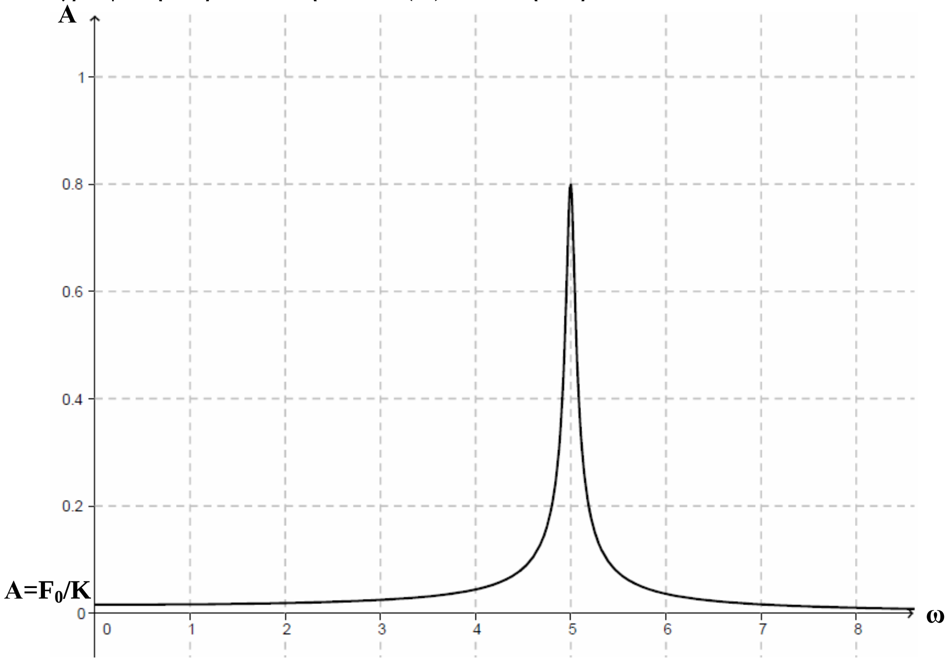
Έτσι από τη σχέση $F_0 = A\cdot\sqrt{b^2\cdot\omega^2+\left(K\text{-}m\omega^2\right)^2}$ έχουμε

$F_0 = 4{,}4\cdot10^{-2}\cdot\sqrt{(0{,}4\cdot4)^2+\left(100\text{-}4\cdot16\right)^2} \Rightarrow F_0 = 1{,}6N$ ακόμη $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{K\text{-}m\omega^2}{b\cdot\omega} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \dfrac{100\text{-}4\cdot16}{0{,}4\cdot4} = \dfrac{36}{1{,}6} = 22{,}5$ ή $\theta = 87{,}45^0$.

Τελικά είναι $F = F_0\cdot$συν$(\omega t\text{-}\theta) \Rightarrow F = 1{,}6\cdot$συν$(4t\text{-}\theta)$.

Η γραφική παράσταση του Α(ω) είναι η παρακάτω.



Ακόμη για σταθερά απόσβεσης $b = \dfrac{m\omega}{2}$ *κατά το συντονισμό είναι* $A = \dfrac{F_0}{b\cdot\omega} =$ $= \dfrac{2F_0}{m\cdot\omega_0^2} = \dfrac{2F_0}{K}$. *Δηλαδή κατά το συντονισμό το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται το διπλάσιο του αρχικού (ω→0).*

γ) Τη χρονική στιγμή $t = \dfrac{\pi}{12}$s, είναι $F = 1{,}6\cdot$συν$(4\cdot\dfrac{\pi}{12}\text{-}\theta) \Rightarrow F = 1{,}6\cdot$συν$(\dfrac{\pi}{3}\text{-}\theta) \Rightarrow$
$\Rightarrow F = 1{,}6\cdot$συν$(60\text{-}87{,}45) \Rightarrow F = 1{,}4N$.

Βέβαια τη δύναμη F μπορούμε να την υπολογίσουμε και από τη σχέση
$F = b\cdot\upsilon + K\cdot x - m\omega^2 x$ με $\upsilon = 17{,}6\cdot10^{-2}\cdot$συν$4t \Rightarrow \upsilon = 17{,}6\cdot10^{-2}\cdot$συν$(4\cdot\dfrac{\pi}{12}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon = 17{,}6\cdot10^{-2}\cdot$συν$(\dfrac{\pi}{3}) \Rightarrow \upsilon = 8{,}8\cdot10^{-2}$m/s και $x = 4{,}4\cdot10^{-2}$ημ$(\dfrac{\pi}{3}) = 2{,}2\sqrt{3}\cdot10^{-2}$m.

Τότε έχουμε $F = b\cdot\upsilon + K\cdot x - m\omega^2 x \Rightarrow F = 0{,}4\cdot8{,}8\cdot10^{-2} + (100\text{-}64)\cdot2{,}2\sqrt{3}\cdot10^{-2} \Rightarrow$
$\Rightarrow F = 0{,}4\cdot8{,}8\cdot10^{-2} + (100\text{-}64)\cdot2{,}2\sqrt{3}\cdot10^{-2} \Rightarrow F = 0{,}032 + 1{,}37 \Rightarrow F = 1{,}4N$.

Ο ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας από τη δύναμη F του διεγέρτη (χεριού) τη στιγμή $t = \dfrac{\pi}{12}$s, είναι $\dfrac{\Delta W_F}{\Delta t} = F\cdot\upsilon \Rightarrow \dfrac{\Delta W_F}{\Delta t} = 1{,}4\cdot8{,}8\cdot10^{-2} \Rightarrow \dfrac{\Delta W_F}{\Delta t} = 0{,}1232$J/s.

δ) Κατά το συντονισμό είναι $K=m\cdot\omega_0^2 \Rightarrow \omega_0=5rad/s$. Τότε για το συντονισμό ισχύει ότι $\Sigma F=m\cdot\alpha \Rightarrow F+F_{αντ}+F_{επ}=m\cdot\alpha \Rightarrow$ $F-b\cdot\upsilon-K\cdot x=-m\omega_0^2 x \Rightarrow$
$\Rightarrow F=b\cdot\upsilon+K\cdot x-m\cdot\omega_0^2 x \Rightarrow F=b\cdot\upsilon+(m\cdot\omega_0^2-m\cdot\omega_0^2)\cdot x \Rightarrow F=b\cdot\upsilon \Rightarrow F=b\cdot\omega_0\cdot A_{max}\cdot συν\omega_0 t$.

Δηλαδή κατά το συντονισμό η εξωτερική δύναμη του διεγέρτη είναι ίση και αντίθετη της δύναμης αντίστασης ($F_{αντ}=-b\cdot\upsilon$). Άρα $F=-F_{αντ}=b\cdot\upsilon$.

Από τη σχέση που μας δίνει το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης προκύπτει

$$A_{max}=\frac{F_0}{\sqrt{b^2\cdot\omega_0^2+\left(K-m\omega_0^2\right)^2}} \Rightarrow A_{max}=\frac{F_0}{b\cdot\omega_0} \Rightarrow A_{max}=\frac{1,6}{0,4\cdot 5} \Rightarrow A_{max}=0,8m.$$

Τελικά $F=b\cdot\omega_0\cdot A_{max}\cdot συν\omega_0 t \Rightarrow F=1,6\cdot συν5t$.

Τότε για $t=\frac{\pi}{15}$ s είναι $F=1,6\cdot συν(5\cdot\frac{\pi}{15}) \Rightarrow F=1,6\cdot συν(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow F=0,8N$.

Ακόμη είναι $x=0,8ημ5t$ και $\upsilon=4\cdot συν5t$. Για $=\frac{\pi}{15}$ s, είναι $\upsilon=4\cdot συν(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \upsilon=2m/s$.

Ο ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας από τη δύναμη F τη στιγμή $t=\frac{\pi}{15}$ s, είναι

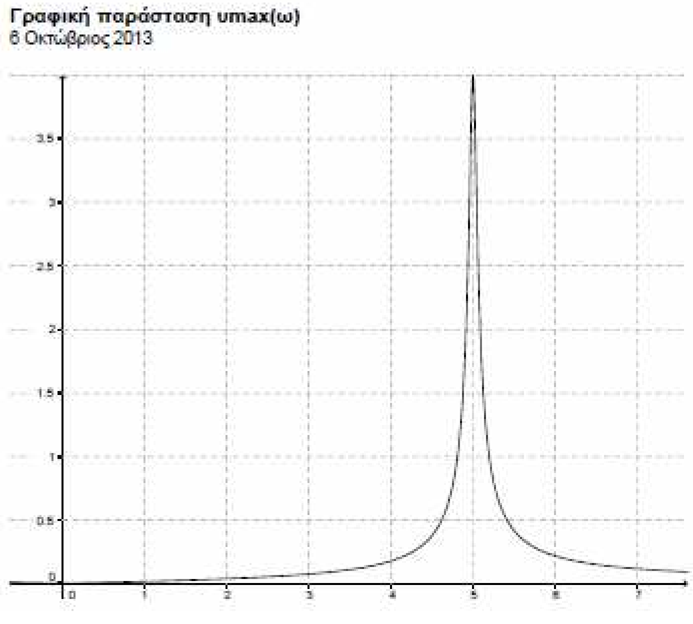
$$\frac{\Delta W_F}{\Delta t}=F\cdot\upsilon \Rightarrow \frac{\Delta W_F}{\Delta t}=0,8\cdot 2 \Rightarrow \frac{\Delta W_F}{\Delta t}=1,6J/s.$$

Ακόμη για $x=Aημ\omega t$ ισχύει και $\upsilon=\omega Aσυν\omega t$, όπου $A=\frac{F_0}{\sqrt{b^2\cdot\omega^2+\left(K-m\omega^2\right)^2}}$. Τότε για τη μέγιστη ταχύτητα ισχύει

$$\upsilon_{max}=\frac{\omega\cdot F_0}{\sqrt{b^2\cdot\omega^2+\left(K-m\omega^2\right)^2}}=\frac{F_0}{\sqrt{\frac{b^2\cdot\omega^2+\left(K-m\omega^2\right)^2}{\omega^2}}}=$$

$$=\frac{F_0}{\sqrt{b^2+\left(\frac{K-m\omega^2}{\omega}\right)^2}}=\frac{F_0}{\sqrt{b^2+\left(\frac{K}{\omega}-m\omega\right)^2}}.$$

Η γραφική παράσταση της μέγιστης ταχύτητας υ_{max} σε συνάρτηση με το ω είναι αυτή που φαίνεται παρακάτω.



Για $\omega \to 0$ είναι $\upsilon_{max} = \dfrac{F_0}{\sqrt{b^2 + \left(\dfrac{K}{\omega}\right)^2}} \to 0$.

Παρατηρούμε ότι κατά το συντονισμό **η ταχύτητα** της ταλαντούμενης μάζας **γίνεται μέγιστη.**

Ακόμη ο ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης είναι $\dfrac{\Delta W}{\Delta t} = F\cdot\upsilon = F_0\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t-\theta)\cdot\ \omega\cdot A\sigma\upsilon\nu\omega t = F_0\cdot\omega\cdot A\sigma\upsilon\nu(\omega t-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t$.

Παραγωγίζοντας την παραπάνω συνάρτηση ως προς ω προκύπτει

$\dfrac{\Delta W}{\Delta t}' = F_0\cdot\omega\cdot A[-\eta\mu(\omega t-\theta)\cdot\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t - \eta\mu\omega t\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t-\theta)\cdot\omega] =$

$= - F_0\cdot\omega^2\cdot A[\eta\mu(\omega t-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t+\eta\mu\omega t\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t-\theta)]$. Για $\dfrac{\Delta W}{\Delta t}' = 0$, προκύπτει

$\eta\mu(\omega t-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t+\eta\mu\omega t\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t-\theta)=0 \Rightarrow \eta\mu\omega t\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t-\theta) = -\eta\mu(\omega t-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta\mu\omega t\cdot\sigma\upsilon\nu(\theta-\omega t) = \eta\mu(\theta-\omega t)\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \varepsilon\varphi(\theta-\omega t)=\varepsilon\varphi\omega t \Rightarrow \theta-\omega t=\kappa\pi+\omega t \Rightarrow \omega t = \dfrac{\theta - \kappa\pi}{2}$.

Άρα λοιπόν ο μέγιστος ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας είναι

$\left(\dfrac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{max} = F_0\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t-\theta)\cdot\ \omega\cdot A\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{max} = F_0\cdot\omega\cdot A\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\kappa\pi + \theta}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\kappa\pi - \theta}{2}\right)$.

Κατά το συντονισμό είναι $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{K - m\omega_0^2}{b\cdot\omega_0}$ με $K=m\omega_0^2$ άρα έχουμε $\varepsilon\varphi\theta=0 \Rightarrow \theta=\kappa\pi$.

$\Rightarrow\left(\dfrac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{max} = F_0\cdot\omega\cdot A_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi) \Rightarrow \left|\left(\dfrac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{max}\right| = F_0\cdot\omega\cdot A_{max}$.

Δηλαδή κατά το συντονισμό έχουμε $\left(\dfrac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{max} = F_0\cdot\omega_0\cdot A_{max}$ με $F_0=b\cdot\omega_0\cdot A_{max}$. Άρα έχουμε $\left(\dfrac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{max} = b\cdot\omega_0^2\cdot A^2_{max} = b\cdot\upsilon_{max}^2$. Αυτός όμως ακριβώς είναι τότε και ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα μέσω της δύναμης απόσβεσης $F_{\alpha\nu\tau} = -b\cdot\upsilon$. Τελικά συμπεραίνουμε ότι κατά το συντονισμό **μεταφέρεται μέγιστη ισχύς** από την εξωτερική δύναμη F που είναι ίσος με το ρυθμό με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα μέσω της δύναμης απόσβεσης.

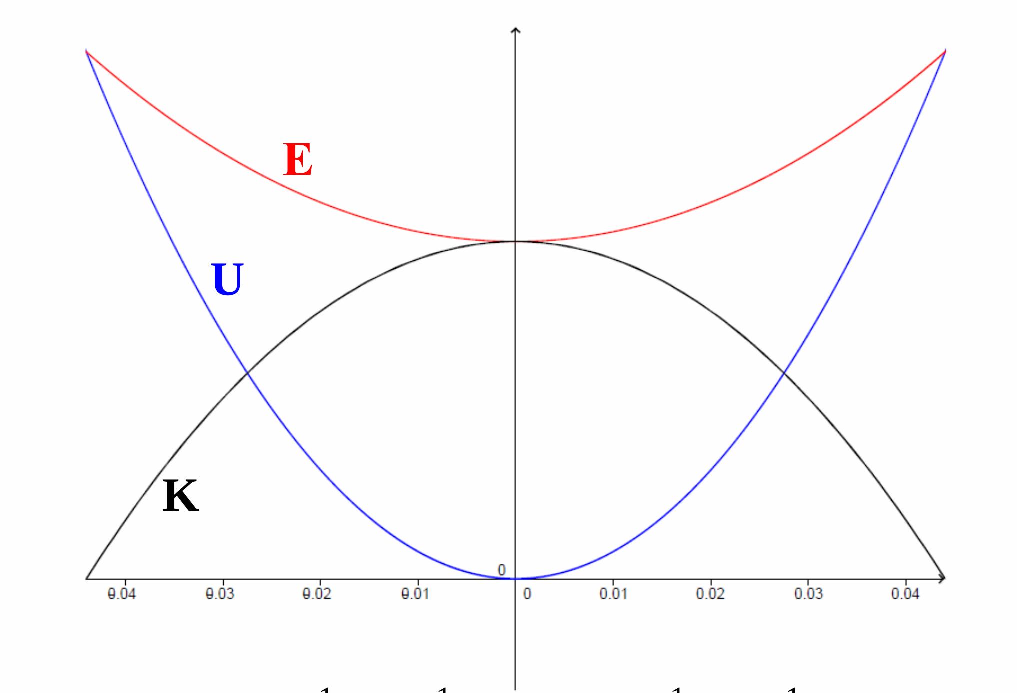
Ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας είναι F.υ. Ο ρυθμός απώλειας ενέργειας είναι Fαντ.υ=-b.υ.υ. Οι δύο ρυθμοί δεν ταυτίζονται παρά μόνο στον συντονισμό όμως η ενέργεια που προσφέρεται ανά περίοδο είναι ίση με τις απώλειες **<u>σε κάθε περίπτωση</u>** είτε έχουμε είτε όχι συντονισμό. Αρκεί να έχει σταθεροποιηθεί το πλάτος.

Ακόμη για τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ισχύει,

Δυναμική ενέργεια: $U = \dfrac{1}{2}\cdot D\cdot x^2$ με $D=K=m\omega_0^2=100N/m$, άρα $U=50\cdot x^2$. Για την κινητική ενέργεια έχουμε,

Κινητική ενέργεια: $K = \dfrac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2 = \dfrac{1}{2}\cdot m\cdot\omega^2(A^2-x^2) = 32(4{,}4^2\cdot 10^{-4}-x^2) \Rightarrow K=0{,}062-32x^2$.

Τότε για την ενέργεια ταλάντωσης ισχύει:
$E=K+U=0,062-32x^2+50\cdot x^2 \Rightarrow E=0,062+18\cdot x^2$. Άρα η ολική ενέργεια στην εξαναγκασμένη ταλάντωση δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το x. Οι γραφικές παραστάσεις των τριών ενεργειών είναι οι παρακάτω:



Κατά το συντονισμό: $K=\frac{1}{2}\cdot m\cdot \upsilon^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot \omega_0^2(A^2-x^2)=\frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2-\frac{1}{2}\cdot K\cdot x^2$. Άρα $E=K+U=\frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2-\frac{1}{2}\cdot K\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot K\cdot x^2=\frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2=$σταθερή.

Προσέχουμε λοιπόν ότι η ενέργεια που αφαιρεί η δύναμη απόσβεσης δεν αναπληρώνεται κάθε στιγμή από το έργο της δύναμης του διεγέρτη. (*Αυτό γίνεται μόνο στην περίπτωση του συντονισμού).* Όμως όση ενέργεια αφαιρείται από τη δύναμη απόσβεσης στη διάρκεια μιας περιόδου τόση και προσφέρεται μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης. Δηλαδή η ενέργεια E της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια μιας περιόδου όμως στο τέλος παραμένει σταθερή.

Μόνο η μέγιστη τιμή της ενέργειας ταλάντωσης η $E_{max}=\frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2$ *παραμένει σταθερή.*

Ισχύει $F_{\varepsilon\xi}=b\upsilon+Kx-m\omega^2x \Rightarrow F_{\varepsilon\xi}=b\upsilon+(K-m\omega^2)x \Rightarrow F_{\varepsilon\xi}=b\upsilon+m\cdot(\omega_0^2-\omega^2)\cdot x$. *Οπότε το έργο της* $F_{\varepsilon\xi}$ *για μετατόπιση της μάζας m από τη θέση ισορροπίας στη μέγιστη απομάκρυνση είναι* $W_{F\varepsilon\xi}=\int_0^A[b\cdot\upsilon\cdot dx+m(\omega_0^2-\omega^2)\cdot x\cdot dx]$ *ενώ το έργο της δύναμης απόσβεσης* $F_{\alpha\pi}$*, για το ίδιο διάστημα [0- A], είναι* $W_{F\alpha\pi}=-\int_0^A b\cdot\upsilon\cdot dx$*, οπότε έχουμε ένα συνολικό έργο από τις εξωτερικές δυνάμεις ίσο με,*

$W_{o\lambda}=\int_0^A m(\omega_0^2-\omega^2)\cdot x\cdot dx=\frac{m\cdot(\omega_0^2-\omega^2)}{2}\cdot A^2$. *Παρόμοια για το διάστημα [-A- 0], έχουμε ένα συνολικό προσφερόμενο έργο από τις εξωτερικές δυνάμεις ίσο με*

$W_{ολ}= -\dfrac{m\cdot(\omega_0^2-\omega^2)}{2}\cdot A^2$. *Οπότε το συνολικό έργο από τις εξωτερικές δυνάμεις σε κάθε ημιπερίοδο και τελικά σε κάθε περίοδο της ταλάντωσης είναι μηδέν. Δηλαδή τελικά όσο έργο καταναλίσκεται από τη δύναμη απόσβεσης σε μια περίοδο τόσο και προσφέρεται από την $F_{εξ}$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι* ***κατά μέσο*** *όρο η ενέργεια Ε, της εξαναγκασμένης ταλάντωσης παραμένει σταθερή, ενώ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργειά της μεταβάλλεται λόγω του έργου των εξωτερικών δυνάμεων.*

Στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις και δεδομένου των αντιστοιχιών:

$x\to q$
$A\to Q$
$b\to R$
$K\to 1/C$
$m\to L$
$F_0\to V_0$ $\left(V=\dfrac{q}{C}\to\dfrac{x}{\frac{1}{K}}\to Kx=F\right)$ και από τη σχέση $A=\dfrac{F_0}{\sqrt{b^2\cdot\omega^2+\left(K-m\omega^2\right)^2}}$

συμπεραίνουμε ότι: $Q=\dfrac{V_0}{\sqrt{R^2\cdot\omega^2+\left(\dfrac{1}{C}-L\omega^2\right)^2}}$ ενώ από τη μέγιστη ταχύτητα

$\upsilon_{max}=\dfrac{F_0}{\sqrt{b^2+\left(\dfrac{K}{\omega}-m\omega\right)^2}}$ συμπεραίνουμε ότι: $I=i_{max}=\dfrac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2}}=\dfrac{V_0}{Z}$.

Παρατηρούμε τότε πως για τις καμπύλες συντονισμού αν $\omega\to 0$ τότε και $I\to 0$, άρα οι καμπύλες θα «περνούν» από το σημείο (0,0). Ακόμη για $\dfrac{1}{C\omega}=L\omega$ η ένταση Ι γίνεται μέγιστη και ίση με $I=\dfrac{V_0}{R}$. Τότε είναι $\omega=\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ οπότε έχουμε συντονισμό μια και η συχνότητα ω γίνεται ίση με τη φυσική (αμείωτη) συχνότητα ω_0 του συστήματος R-L-C.

Οπότε η γραφική παράσταση Ι(ω) είναι η παρακάτω: