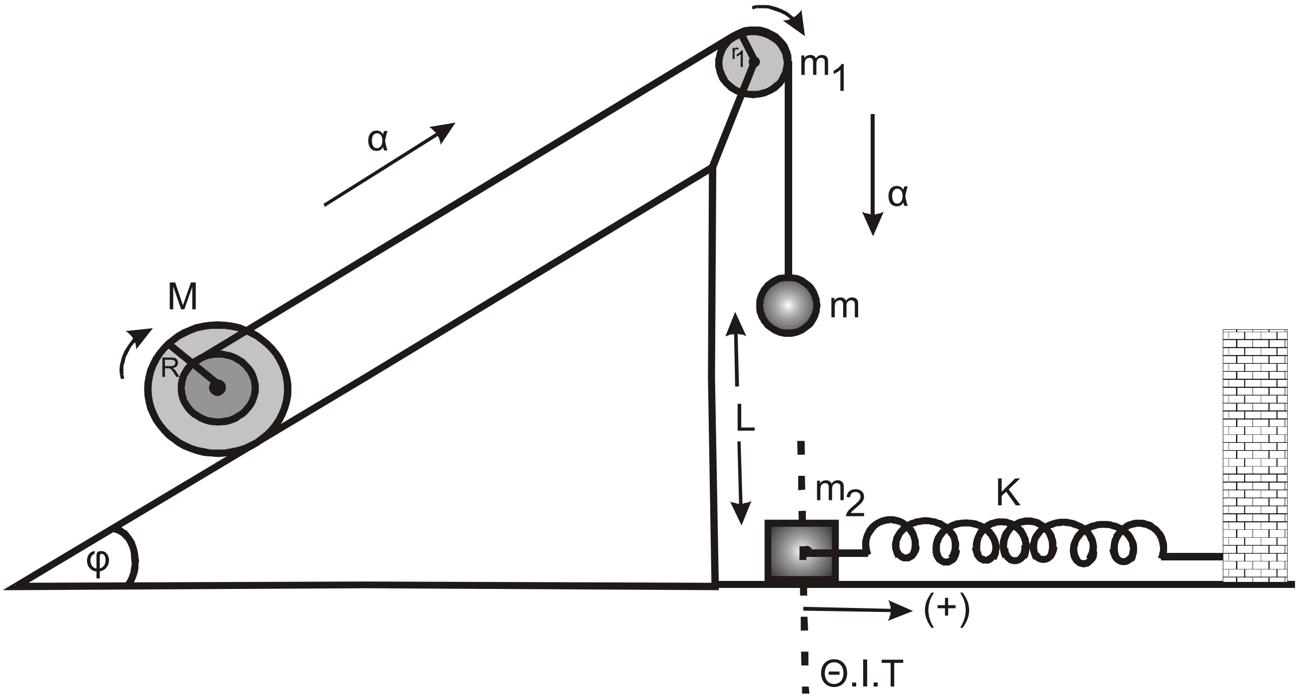
52. Πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $φ=30^0$ βρίσκεται ένας κύλινδρος μάζας M=2Kg ακτίνας R=0,4m. Σε απόσταση r=R/2 από το κέντρο του κυλίνδρου και πάνω σε αυτόν βρίσκεται τυλιγμένο κατάλληλα ένα αβαρές σχοινί που μπορεί να ξετυλίγεται χωρίς να γλιστρά.
Το σχοινί περνάει από το αυλάκι μιας σταθερής τροχαλίας μάζας m_1=2Kg και ακτίνας r_1=0,1m, στο ελεύθερο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα μάζας m=1Kg. Αν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί και αν ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει τότε να υπολογιστούν:



Α) α) η επιτάχυνση της μάζας m
β) η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου και της τροχαλίας
γ) Η τάση στα άκρα του σχοινιού
δ) Η σταθερή στατική τριβή που δέχεται ο κύλινδρος από το κεκλιμένο επίπεδο

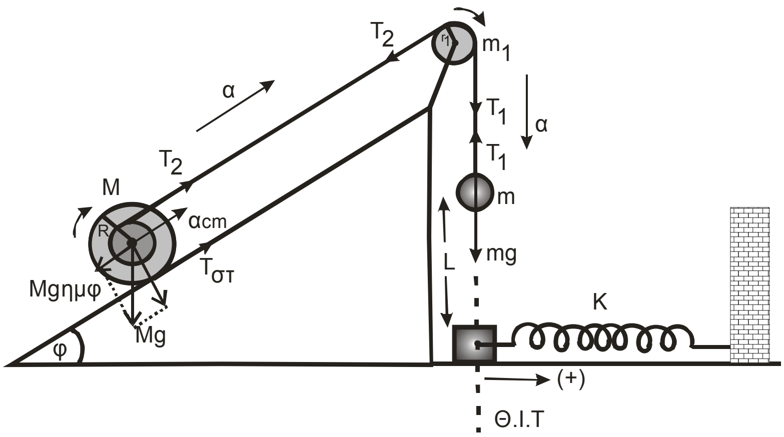
Β) Να υπολογιστούν:
α) ο ρυθμός αύξησης της στροφορμής της τροχαλίας και του κυλίνδρου
β) η ταχύτητα του σώματος μάζας m, τη στιγμή που έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους L=0,32m .
Γ) Αν τη στιγμή εκείνη κόβεται το νήμα και η μάζα m, συγκρούεται πλαστικά με τη μάζα m_2=1Kg που πραγματοποιεί α.α.τ με εξίσωση $x=\sqrt{2}\,ημ(5\sqrt{2}\,t)$ (S.I) και εκείνη τη στιγμή βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της, κινούμενη προς τη θετική κατεύθυνση, τότε να βρείτε την εξίσωση της α.α.τ του συσσωματώματος μετά την πλαστική κρούση.
Δίνεται η ροπή αδράνειας ως προς το Κ.Μ του κυλίνδρου $I_K=1/2MR^2$ και της τροχαλίας $I_τ=1/2m_1r_1^2$.

Λύση:

Α) α)Για η μάζα m που κάνει μεταφορική κίνηση θα έχουμε: $\Sigma F=m\alpha \Rightarrow mg-T_1=m\alpha$ (1) Παρόμοια για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας m_1 θα έχουμε: $\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$

$\Rightarrow(T_1-T_2)r_1=\frac{1}{2}m_1r_1^2\frac{\alpha}{r_1}\Rightarrow$

$\Rightarrow T_1-T_2=\frac{1}{2}m_1\alpha$ (2)



Για τον κύλινδρο μάζας M και για τη μεταφορική του κίνηση έχουμε : $\Sigma F=M\alpha_{cm}\Rightarrow T_2+T_{\sigma\tau}-Mg\eta\mu\varphi= M\alpha_{cm}$. Όμως ισχύει ότι $\upsilon_{cm}=\omega R\Rightarrow\frac{\Delta\upsilon_{cm}}{\Delta t}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}R\Rightarrow$

$\Rightarrow\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R\Rightarrow\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{\alpha_{cm}}{R}$. Ακόμη $\upsilon=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma}\Rightarrow\upsilon=\omega R+\omega r\Rightarrow\upsilon=\omega R+\omega\frac{R}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\upsilon=\frac{3}{2}\omega R\Rightarrow\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}=\frac{3}{2}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}R\Rightarrow\alpha=\frac{3}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}R\Rightarrow\alpha=\frac{3}{2}\alpha_{cm}$ ή $\alpha_{cm}=\frac{2}{3}\alpha$.

Τότε έχουμε $T_2+T_{\sigma\tau}-Mg\eta\mu\varphi=\frac{2}{3}M\alpha$ (3).

Για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow T_2r-T_{\sigma\tau}R=\frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_{cm}}{R}\Rightarrow T_2\frac{R}{2}-T_{\sigma\tau}R=\frac{1}{2}MR\alpha_{cm}\Rightarrow\frac{T_2}{2}-T_{\sigma\tau}=\frac{1}{2}M\frac{2}{3}\alpha\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{T_2}{2}-T_{\sigma\tau}=\frac{M}{3}\alpha$ (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει $\frac{3}{2}T_2-Mg\eta\mu\varphi=M\alpha\Rightarrow T_2=\frac{2}{3}M(5+\alpha)$.

Τότε (2)$\Rightarrow T_1=\frac{20}{3}+\frac{7}{3}\alpha$ και (1)$\Rightarrow\alpha=1m/s^2$ και ή $\alpha_{cm}=\frac{2}{3}m/s^2$.

β) Για τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου έχουμε $\alpha_{\kappa(\gamma\omega\nu)}=\frac{\alpha_{cm}}{R}=\frac{2\alpha}{3R}=\frac{5}{3}rad/s^2$,

ενώ για τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας έχουμε $\alpha_{\tau(\gamma\omega\nu)}=\frac{\alpha}{r_1}=10rad/s^2$,

γ) Οι τάσεις στα άκρα του σχοινιού είναι $T_1=9N$ και $T_2=8N$.

δ) Από τη σχέση (4) για τη σταθερή στατική τριβή που δέχεται ο κύλινδρος από το κεκλιμένο επίπεδο έχουμε $T_{\sigma\tau}=\frac{T_2}{2}-\frac{M}{3}\alpha=4-\frac{2}{3}\Rightarrow T_{\sigma\tau}=\frac{10}{3}N$.

Β) α) Για το ρυθμό αύξησης της στροφορμής του κυλίνδρου θα έχουμε

$\frac{\Delta L}{\Delta t}$ $_{κυλίνδρου}$$=\Sigma\tau= T_2 r - T_{στ}R = T_2\frac{R}{2} - T_{στ}R = \frac{4}{15}$ Kgm^2/s^2 ή θα μπορούσαμε να έχουμε και

$\frac{\Delta L}{\Delta t}$ $_{κυλίνδρου}$$=\Sigma\tau=\frac{1}{2}MR^2\ \alpha_{κ(γων)}=0{,}16\cdot\frac{5}{3}=\frac{4}{15}$ Kgm^2/s^2.

Παρόμοια για το ρυθμό αύξησης της στροφορμής της τροχαλίας θα έχουμε
$\frac{\Delta L}{\Delta t}$ $_{τροχαλίας}$$=\Sigma\tau=\Rightarrow(T_1-T_2)r_1=0{,}1$ Kgm^2/s^2 ή θα μπορούσαμε να έχουμε και

$\frac{\Delta L}{\Delta t}$ $_{τροχαλίας}$ $=\Sigma\tau=\frac{1}{2}m_1 r_1^2\ \alpha_{τ(γων)}=0{,}01\cdot10=0{,}1$ Kgm^2/s^2.

β) $L=\frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t=0{,}8s$, άρα $\upsilon=\alpha t\Rightarrow\upsilon=0{,}8m/s$.

Γ) Επειδή η m_2 εκείνη τη στιγμή βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της, κινούμενη προς τη θετική κατεύθυνση, θα έχει μέγιστη θετική ταχύτητα υ_{max}. Όμως $\upsilon_{max}=\omega A\Rightarrow$
$\Rightarrow\upsilon_{max}=5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=10m/s$. Ακόμη για τη σταθερά K του ελατηρίου θα είναι $K=m_2\omega^2\Rightarrow K=25\cdot2\Rightarrow K=50N/m$.

Από την Α.Δ.Ο$_{(xx')}$: $m_2\upsilon_{max}=(m+m_2)\ \upsilon_{max}'\Rightarrow\upsilon_{max}'=\frac{\upsilon_{max}}{2}\Rightarrow\upsilon_{max}'=5m/s$.

Ακόμη για την καινούργια συχνότητα έχουμε $K=(m+m_2)\omega'^2\Rightarrow\omega'=5rad/s$. Όμως $\upsilon_{max}'=\omega'A'\Rightarrow A'=1m$. Τότε η εξίσωση της α.α.τ του συσσωματώματος μετά την πλαστική κρούση θα είναι $x'=$ημ$5t$.