56. Διακρότημα με αρχική φάση

Ένα σώμα πραγματοποιεί ταυτόχρονα δυο α.α.τ ίδιου πλάτους, γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση και με συχνότητες που διαφέρουν λίγο μεταξύ τους με εξισώσεις $x_1=A\cdot ημ(ω_1t+φ_0)$ και $x_2=A\cdot ημω_2t$, τότε:
α) να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης κίνησης,
β) να δείξετε ότι η αυθαίρετη αρχική φάση $φ_0$ αλλάζει τις χρονικές στιγμές που μεγιστοποιείται το πλάτος του διακροτήματος , όμως ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων του πλάτους του διακροτήματος παραμένει σταθερός.

Συνοπτική Λύση

α) Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων η απομάκρυνση του σώματος κάποια στιγμή θα είναι $x=x_1+x_2 \Rightarrow x= A\cdot ημ(ω_1t+φ_0) +A\cdot ημω_2t$.
Με βάση την τριγωνομετρική ταυτότητα $ημA+ημB=2συν\left(\frac{A-B}{2}\right)\cdot ημ\left(\frac{A+B}{2}\right)$, έχουμε

$$x= 2A\cdot συν\left(\frac{ω_1t+φ_0-ω_2t}{2}\right)\cdot ημ\left(\frac{ω_1t+φ_0+ω_2t}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x= 2A\cdot συν\left(\frac{ω_1-ω_2}{2}t+\frac{φ_0}{2}\right)\cdot ημ\left(\frac{ω_1+ω_2}{2}t+\frac{φ_0}{2}\right).$$

β) Το πλάτος της περιοδικής κίνησης είναι $|A'|=2A\cdot\left|συν\left(\frac{ω_1-ω_2}{2}t+\frac{φ_0}{2}\right)\right|$.

Το πλάτος $|A'|$ γίνεται μέγιστο 2A όταν $συν\left(\frac{ω_1-ω_2}{2}t+\frac{φ_0}{2}\right)=\pm1\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|ω_1-ω_2|}{2}t+\frac{φ_0}{2}=kπ\Rightarrow \frac{|ω_1-ω_2|}{2}t=kπ-\frac{φ_0}{2}\Rightarrow 2π\frac{|f_1-f_2|}{2}t=kπ-\frac{φ_0}{2}\Rightarrow$$

$|f_1-f_2|t=k-\frac{φ_0}{2π}\Rightarrow t=\frac{k-\frac{φ_0}{2π}}{|f_1-f_2|}$ όπου $k\in Z$ ώστε $t>0$. Δηλαδή η αρχική φάση $φ_0$ επηρεάζει τις χρονικές στιγμές στις οποίες το πλάτος του διακροτήματος γίνεται μέγιστο.
Για δυο διαδοχικές χρονικές στιγμές t_1, t_2 όπου μεγιστοποιείται το πλάτος του διακροτήματος έστω ότι έχουμε $t_1=\frac{k_1-\frac{φ_0}{2π}}{|f_1-f_2|}$ και $t_2=\frac{k_1+1-\frac{φ_0}{2π}}{|f_1-f_2|}$. Επομένως

$$T_δ=t_2-t_1=\frac{k_1+1-\frac{φ_0}{2π}-k_1+\frac{φ_0}{2π}}{|f_1-f_2|}\Rightarrow T_δ=\frac{1}{|f_1-f_2|} \text{ ή } f_δ=|f_1-f_2|.$$

Άρα η περίοδος του διακροτήματος είναι ανεξάρτητη από την αρχική φάση $φ_0$.