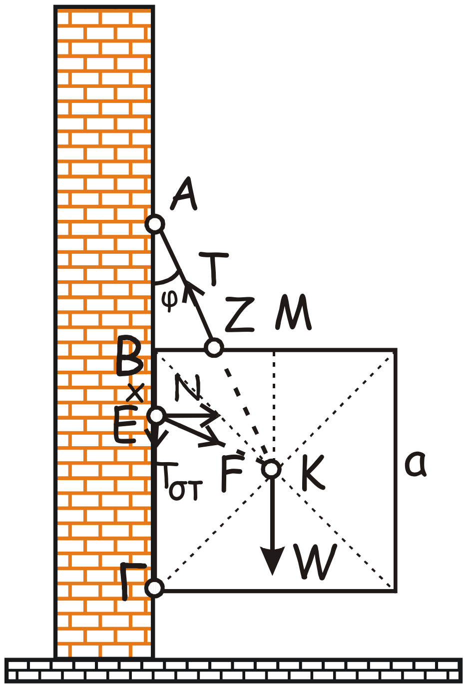
61_3. Ισορροπία της «πλάκας»



Η τετράγωνη πλάκα του σχήματος πλευράς α έχει βάρος w=50N. Το σχοινί ΑΖ είναι αβαρές και έχει μήκος L. Η πλάκα ισορροπεί και το σχοινί ΑΖ στην προέκτασή του περνάει από το κέντρο Κ της πλάκας ενώ τέμνει τη μια πλευρά της πλάκας σε απόσταση $\frac{α}{4}$ από το μέσο της Μ, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Να υπολογίσετε τη δύναμη F που ασκεί ο τοίχος στην πλάκα.

Συνοπτική Λύση

Επειδή η πλάκα ισορροπεί με την επίδραση τριών δυνάμεων του βάρους w, της τάσης Τ του σχοινιού και της δύναμης F που ασκεί ο τοίχος στην πλάκα, θα πρέπει οι φορείς των τριών δυνάμεων να διέρχονται από το Κ.
Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΖ και ΚΜΖ έχουμε $(AB)=(KM)=\frac{α}{2}$. Ακόμη από την κατασκευή είναι $(BZ)=\frac{α}{4}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ είναι $εφφ=\frac{α/4}{α/2}=\frac{1}{2}$.

$ΣF_y=0 \Rightarrow T_y=T_{στ}+w \Rightarrow Tσυνφ=T_{στ}+w$ και $ΣF_x=0 \Rightarrow T_x=N \Rightarrow Tημφ=N$.

Τότε $εφφ=\frac{N}{T_{στ}+w}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2N=T_{στ}+w$ ή $\mathbf{T_{στ}=2N-w}$ (1).

$Στ_{(A)}=0 \Rightarrow w\frac{α}{2}=N(x+\frac{α}{2}) \Rightarrow w\frac{α}{2}=Nx+N\frac{α}{2} \Rightarrow (w-N)\frac{α}{2}=Nx \Rightarrow \mathbf{x=\frac{α}{2}(\frac{w}{N}-1)}$. (2)

όπου x=(ΒΕ) είναι η θέση του σημείου εφαρμογής της δύναμης F που ασκεί ο τοίχος στην πλάκα.

Γενικά ισχύει $0 \leq x \leq α$.

- **Για x=0**$\Rightarrow \frac{w}{N}=1 \Rightarrow w=N$. Τότε (1) $\Rightarrow T_{στ}=2N-w \Rightarrow T_{στ}=w=N$ και $F=\sqrt{N^2+T_{στ}^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow F=N\cdot\sqrt{2}$ και $εφθ=\frac{T_{στ}}{w} \Rightarrow εφθ=1$ ή $θ=45^0$, δηλαδή η F βρίσκεται πάνω στη διαγώνιο και εφαρμόζεται στο σημείο Β.

- **Για x=**$\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{w}{N}-1=1 \Rightarrow \frac{w}{N}=2 \Rightarrow N=\frac{w}{2}$. Τότε (1) $\Rightarrow T_{\sigma\tau}=2N-w \Rightarrow$ $T_{\sigma\tau}=0$ και F=N με εφθ=$\frac{T_{\sigma\tau}}{w} \Rightarrow$ εφθ=0 ή θ=0^0, δηλαδή η F βρίσκεται στο μέσο της πλευράς ΒΓ και περνάει από το κέντρο Κ της πλάκας. Είναι η περίπτωση που ο τοίχος είναι λείος.

- **Για x=**$\frac{\alpha}{4} \Rightarrow \frac{w}{N}-1=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{w}{N}=\frac{3}{2} \Rightarrow N=\frac{2w}{3}$. Τότε (1) $\Rightarrow T_{\sigma\tau}=2N-w \Rightarrow$ $T_{\sigma\tau}=\frac{w}{3}$ και $F=\sqrt{N^2+T_{\sigma\tau}^2} \Rightarrow F=\frac{\sqrt{5}w}{3}$ και εφθ=$\frac{T_{\sigma\tau}}{w} \Rightarrow$ εφθ=$\frac{1}{2}$.

- **Για x=α**$\Rightarrow \frac{w}{N}-1=2 \Rightarrow \frac{w}{N}=3 \Rightarrow N=\frac{w}{3}$. Τότε (1) $\Rightarrow T_{\sigma\tau}=2N-w \Rightarrow T_{\sigma\tau}=\frac{2w}{3}-N \Rightarrow$

$\Rightarrow T_{\sigma\tau}=-\frac{w}{3}=-N$

$F=\sqrt{N^2+T_{\sigma\tau}^2}=N\cdot\sqrt{2}$ και εφθ=$\frac{T_{\sigma\tau}}{w} \Rightarrow$ εφθ=1 ή θ=45^0, δηλαδή η F βρίσκεται πάνω στη διαγώνιο και εφαρμόζεται στο σημείο Γ.

Για $0 \le x \le \frac{\alpha}{2}$

Έχουμε: $0 \le \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{N}}\mathbf{-1}\right) \le \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 1 \le \frac{w}{N} \le 2 \Rightarrow \frac{w}{2} \le N \le w$. Τότε

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow T_x=N$ οπότε έχουμε $\frac{w}{2} \le T_x \le w$ και

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow T_y=T_{\sigma\tau}+w=2N$ οπότε έχουμε $2\frac{w}{2} \le 2N \le 2w \Rightarrow w \le T_y \le 2w$

Για $\frac{\alpha}{2} \le x \le \alpha$

Έχουμε: $\frac{\alpha}{2} \le \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{N}}\mathbf{-1}\right) \le \alpha \Rightarrow 1 \le \frac{w}{N}-1 \le 2 \Rightarrow 2 \le \frac{w}{N} \le 3 \Rightarrow \frac{w}{3} \le N \le \frac{w}{2}$. Τότε

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow T_x=N$ οπότε έχουμε $\frac{w}{3} \le T_x \le \frac{w}{2}$ και

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow T_y=T_{\sigma\tau}+w=2N$ οπότε έχουμε $2\frac{w}{3} \le 2N \le w \Rightarrow \frac{2w}{3} \le T_y \le w$

Για x<0

Έχουμε: $\frac{\alpha}{2}(\frac{w}{N}-1) < 0 \Rightarrow \frac{w}{N} < 1 \Rightarrow N > w$. Τότε

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow T_x=N$ οπότε έχουμε $T_x > w$ και

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow T_y=T_{\sigma\tau}+w=2N$ οπότε έχουμε $T_y > 2w$.

Για $x>\alpha$

Έχουμε: $\frac{\alpha}{2}(\frac{w}{N}-1) > \alpha \Rightarrow \frac{w}{N}-1>2 \Rightarrow 2\leq\frac{w}{N}>3 \Rightarrow N<\frac{w}{3}$. Τότε

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow T_x=N$ οπότε έχουμε $T_x < \frac{w}{3}$ και

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow T_y=T_{\sigma\tau+}w=2N$ οπότε έχουμε $T_y < \frac{2w}{3}$

Όμως είναι και $T_y \geq 0$ άρα για $x>\alpha$ έχουμε $0 \leq T_y < \frac{2w}{3}$.

Γενικά για το σημείο εφαρμογής της δύναμης F θα έχουμε:

Για $w \leq T_y \leq 2w$, $0 \leq x \leq \frac{\alpha}{2}$

Για $\frac{2w}{3} \leq T_y \leq w$, $\frac{\alpha}{2} \leq x \leq \alpha$

Για $0 \leq T_y < \frac{2w}{3}$, $x>\alpha$ (αδύνατο)

Για $T_y > 2w$, $x<0$ (αδύνατο)

mix-mix@sch.gr