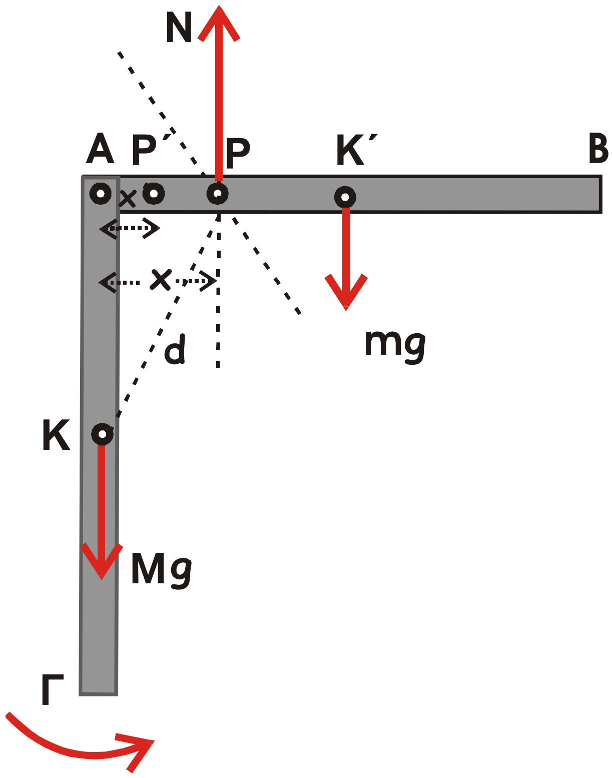
62. Δυο ράβδοι

Δυο λεπτές, ισοπαχείς και ομογενείς ράβδοι ΑΒ και ΑΓ, που έχουν το ίδιο μήκος L=0,5m και έχουν αντίστοιχα μάζες m=1Kg και M=3Kg, συγκολλούνται στο άκρο τους Α, ώστε να σχηματίζουν ορθή γωνία. Το σύστημα των δυο ράβδων μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο ΓΑΒ, που διέρχεται από το σημείο Ρ της ράβδου ΑΒ, τέτοιο ώστε $(AP)=x=\frac{L}{4}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα αρχικά συγκρατείται στη θέση όπου η ράβδος ΑΒ είναι οριζόντια.



Τότε:

α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος των δυο ράβδων τη στιγμή που αφήνουμε το σύστημα από την αρχική του θέση να περιστραφεί,

β) να βρείτε την απόσταση x΄ από το Α, του σημείου Ρ΄ από το οποίο έπρεπε να περνάει ο οριζόντιος άξονας ώστε το σύστημα αρχικά να ισορροπούσε,

γ) ποια είναι η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται από τον άξονα περιστροφής στο σύστημα τη στιγμή της εκκίνησης;

Δίνεται η ροπή αδράνειας ράβδου μάζας Μ και μήκους L ως προς το κέντρο μάζας της $I_{cm}=\frac{1}{12}ML^2$

Συνοπτική λύση:

α) Για τη ροπή αδράνειας της κάθε ράβδου γύρω από τον άξονα περιστροφής που περνάει από το Ρ και σύμφωνα με το θεώρημα του Steiner θα έχουμε:

$I_{AB}=I_1=\frac{1}{12}mL^2+m\frac{L^2}{16}=\frac{4mL^2+3mL^2}{48}=\frac{7mL^2}{48}=\frac{7}{192}Kg{\cdot}m^2$. Παρόμοια

$I_{A\Gamma}=I_2=\frac{1}{12}ML^2+M{\cdot}d^2$ όπου $d^2=x^2+\frac{L^2}{4}=\frac{L^2}{16}+\frac{4L^2}{16}=\frac{5L^2}{16}$, άρα

$I_2=\frac{4ML^2}{48}+\frac{15ML^2}{48}=\frac{19ML^2}{48}=\frac{57}{192}Kg{\cdot}m^2$. Άρα $I_{ολ}=I_1+I_2=\frac{64}{192}\Rightarrow I_{ολ}=\frac{1}{3}$ $Kg{\cdot}m^2$.

Τότε ισχύει,

$\Sigma\tau_{(P)}=I_{ολ}{\cdot}\alpha_{γων}\Rightarrow Mgx-mg(\frac{L}{2}-x)=I_{ολ}{\cdot}\alpha_{γων}\Rightarrow 30{\cdot}\frac{1}{8}-10{\cdot}(\frac{1}{4}-\frac{1}{8})=\frac{1}{3}{\cdot}\alpha_{γων}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{30}{8}-\frac{10}{8}=\frac{1}{3}{\cdot}\alpha_{γων}\Rightarrow 2{,}5=\frac{1}{3}{\cdot}\alpha_{γων}\Rightarrow\alpha_{γων}=7{,}5rad/s^2$.

β) $\Sigma\tau_{(P')}=0 \Rightarrow Mgx'-mg(\frac{L}{2}-x')= 0 \Rightarrow 30\cdot x'=10\cdot(\frac{1}{4}-x') \Rightarrow 3\cdot x'=\frac{1}{4}-x' \Rightarrow 4\cdot x'=\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x'=\frac{1}{16}$ m ή x΄=(AP΄)=6,25cm από το A.

γ) Για να βρούμε την κατακόρυφη αντίδραση N από τον άξονα περιστροφής (στο P) πρέπει να βρούμε την επιτάχυνση $\alpha_{\varepsilon y}$ του κέντρου μάζας G, του συστήματος.

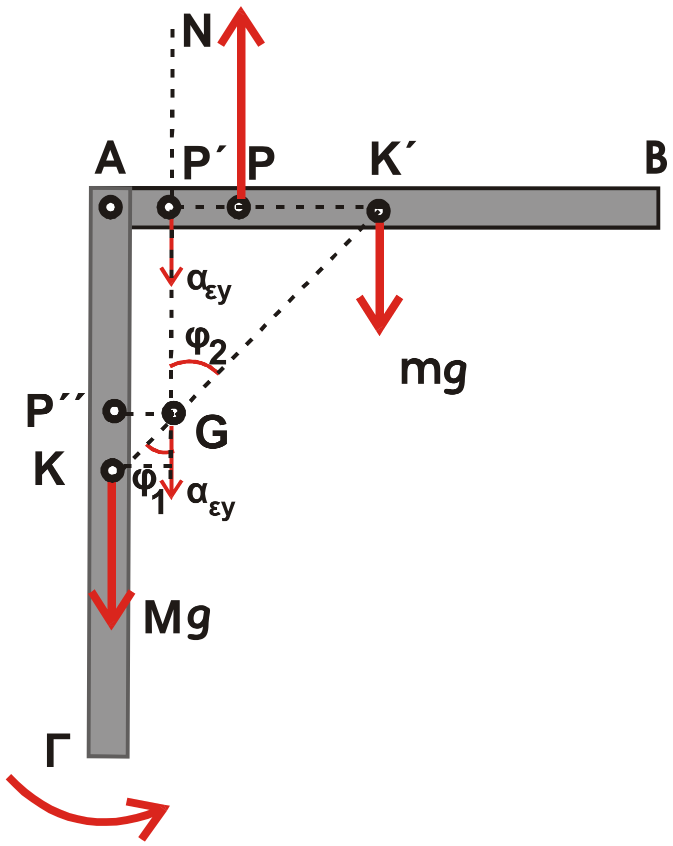
Επειδή το σύστημα των μαζών ισορροπεί, για τον άξονα που περνά από το P΄ με (AP΄)=$x'=\frac{1}{16}$ m, το K.M του συστήματος θα βρίσκεται πάνω στην κάθετη στη ράβδο (AB) που περνά από το P΄.

Αν κάναμε το ίδιο βάζοντας τη ράβδο (AΓ) μάζας M, οριζόντια και τη ράβδο (AB) μάζας m κατακόρυφη τότε θα έχουμε,

$\Sigma\tau_{(P'')}=0 \Rightarrow mgx''-Mg(\frac{L}{2}-x'')=0$

$\Rightarrow 10\cdot x''=30\cdot(\frac{1}{4}-x'') \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\cdot x''=\frac{3}{4} \Rightarrow x''=\frac{3}{16}$ m. Άρα ο άξονας



περιστροφής θα έπρεπε να περνάει από το σημείο P΄΄ με $x''=(AP'')=\frac{3}{16}$ m ή 18,75cm. Τότε το K.M, (G) του συστήματος θα βρίσκεται πάνω στο σημείο τομής των P΄G και P΄΄G. Ακόμη από το σχήμα φαίνεται ότι $\varepsilon\varphi\varphi_1=\frac{1/16}{1/16}=1$ και $\varepsilon\varphi\varphi_2=\frac{3/16}{3/16}=1$ άρα το K.M, (G) του συστήματος θα βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα (KK΄) που συνδέει τα K.M των δυο ράβδων. Επίσης είναι $\frac{(KG)}{(K'G)}=\frac{1/16}{3/16}=\frac{1}{3}$=σταθερό ή (K΄G)=3(KG).

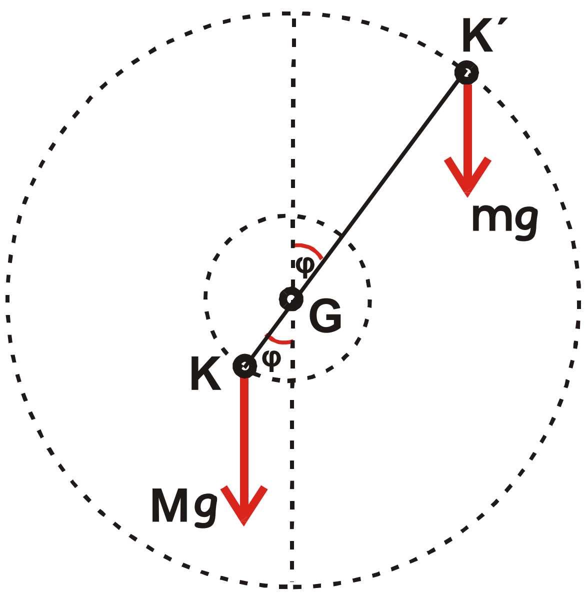
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το K΄K να σχηματίζει μια τυχαία γωνία φ με την κατακόρυφο, όταν το σύστημα των δυο ράβδων έχει περιστραφεί γύρω από άξονα που περνάει από το K.M (G) του συστήματος.

Τότε για τη συνολική ροπή ως προς το G θα έχουμε,

$\Sigma\tau_{(G)}= Mg(KG)\eta\mu\varphi-mg(K'G)\eta\mu\varphi \Rightarrow \Sigma\tau_{(G)}= 3mg(KG)\eta\mu\varphi-3mg(KG)\eta\mu\varphi =0$

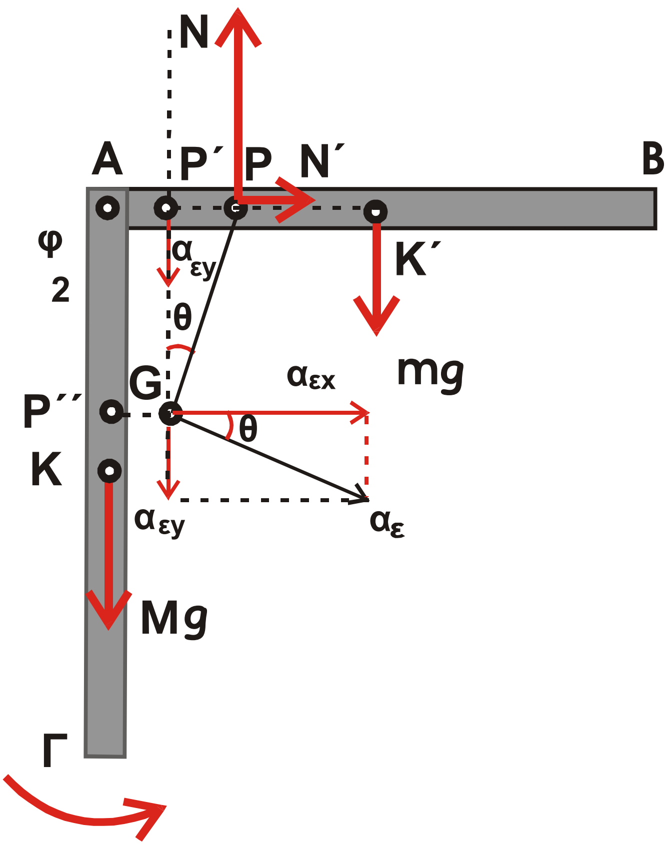
(K΄G)=3(KG) και M=3m.

Άρα σε κάθε θέση το σύστημα ισορροπεί ως προς οριζόντιο άξονα που περνάει από το (G).
Τότε αν ξαναγυρίσουμε στο ερώτημα όπου ο άξονας περιστροφής περνάει από το σημείο P με $(AP)=x=\frac{1}{8}m$ θα έχουμε ότι η επιτρόχιος επιτάχυνση του σημείου P΄ τη στιγμή της εκκίνησης θα είναι,



$\alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho\acute{o}\chi\iota\alpha}=\alpha_{\varepsilon y}=\alpha_{\gamma\omega\nu}(x-x')=$
$=\frac{15}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)=\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{16}\Rightarrow\Rightarrow$
$\Rightarrow\alpha_{\varepsilon y}=\frac{15}{32}m/s^2$. Τότε και το Κ.Μ (G) του συστήματος έχει εκείνη τη στιγμή την ίδια κατακόρυφη επιτρόχιο επιτάχυνση $\alpha_{\varepsilon y}$.
Ισχύει, $\Sigma F=(m+M)\cdot\alpha_{\varepsilon y}\Rightarrow(m+M)\cdot g-N=(m+M)\cdot\alpha_{\varepsilon y}\Rightarrow N=(m+M)\cdot g-(m+M)\cdot\alpha_{\varepsilon y}\Rightarrow$
$\Rightarrow N=40-4\cdot\frac{15}{32}\Rightarrow N=\frac{305}{8}N$ ή $N=38{,}125N$.

Το G βέβαια κάνει κυκλική κίνηση με κέντρο το P. Άρα η επιτρόχια επιτάχυνσή του είναι κάθετη στην GP. Τότε η $\alpha_{\varepsilon y}$ του G είναι ίση με $\alpha_{\varepsilon y}=\frac{15}{32}m/s^2$.



Ακόμη είναι $\varepsilon\varphi\theta=\frac{(P'P)}{(AP'')}=\frac{1}{3}$, και

$\varepsilon\varphi\theta=\frac{\alpha_{\varepsilon y}}{\alpha_{\varepsilon x}}=\frac{1}{3}$, άρα

$\alpha_{\varepsilon x}=3\cdot\alpha_{\varepsilon y}=3\cdot\frac{15}{32}=\frac{45}{32}\ m/s^2$.

Τότε για την οριζόντια συνιστώσα της δύναμης N΄ που ασκεί στη ράβδο ο άξονας περιστροφής έχουμε,

$N'=(m+M)\cdot\alpha_{\varepsilon x}\Rightarrow N'=\frac{45}{8}N$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

1. Η επιτάχυνση του G δίνεται από τη σχέση: $\alpha_G=\alpha_\varepsilon=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(GP)$.
Η επιτάχυνση αυτή είναι η επιτρόχια του G. Το G δεν έχει ακόμα κεντρομόλο επιτάχυνση αφού μόλις αρχίζει να κινείται και άρα ω=0.

Ισχύει $(GP)=\sqrt{(P'P)^2+(AP'')^2}=\frac{\sqrt{10}}{16}m$. Οπότε έχουμε

α_ε=$\alpha_{\gamma\omega\nu}$·(GP)= $\frac{15}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{16} \Rightarrow$ α_ε=$\frac{15\sqrt{10}}{32}$ m/s^2.

Για τη δύναμη την παράλληλη στη διεύθυνση GP, έχουμε: $\Sigma F_1=0$, ενώ για τη δύναμη την κάθετη στη διεύθυνση GP, έχουμε: $\Sigma F_2=(m+M)\cdot\alpha_\varepsilon$.

Ακόμη για την επιτρόχια επιτάχυνση του G και από τις συνιστώσες της $\alpha_{\varepsilon x}$ και $\alpha_{\varepsilon y}$ που υπολογίσαμε παραπάνω, επαληθεύεται ότι $\alpha_\varepsilon=\sqrt{\alpha_{\varepsilon x}^{\ 2}+\alpha_{\varepsilon y}^{\ 2}} \Rightarrow$

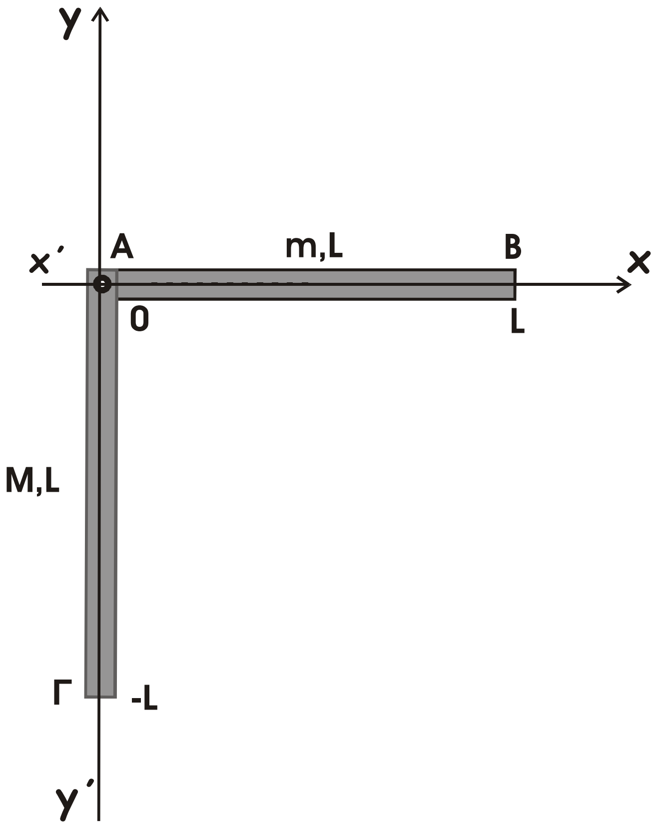
$$\Rightarrow \alpha_\varepsilon=\sqrt{\left(\frac{45}{32}\right)^2+\left(\frac{15}{32}\right)^2} \Rightarrow \alpha_\varepsilon=\frac{\sqrt{2250}}{32} \Rightarrow \alpha_\varepsilon=\frac{15\sqrt{10}}{32}\ \text{m/s}^2.$$

2. Για το σύστημά μας αρχικά και για τη ράβδο (ΑΒ) με μάζα m και γραμμική πυκνότητα έστω λ_1 έχουμε,

$m=\lambda_1\int_0^L dx \Rightarrow 1=\lambda_1\cdot L \Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{L}$. Παρόμοια για τη ράβδο (ΑΓ) με μάζα Μ και γραμμική πυκνότητα έστω λ_2 έχουμε,

$M=\lambda_2\int_{-L}^{0} dy \Rightarrow 3=\lambda_2\cdot L \Rightarrow \lambda_2=\frac{3}{L}$.

Τότε για τις συντεταγμένες x_G ,y_G του Κ.Μ (G) θα έχουμε,



$$x_G=\frac{1}{m_1+m_2}\int_0^L x\cdot\lambda_1\cdot dx=\frac{\lambda_1}{m_1+m_2}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_G=\frac{1}{L\cdot(m_1+m_2)}\cdot\frac{L^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_G=\frac{L}{2\cdot(m_1+m_2)} \Rightarrow x_G=\frac{0,5}{2\cdot 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_G=\frac{1}{16}\text{m και}$$

$$y_G=\frac{1}{m_1+m_2}\int_{-L}^{0} y\cdot\lambda_2\cdot dy=\frac{\lambda_2}{m_1+m_2}\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_{-L}^{0} \Rightarrow y_G=\frac{-3}{L\cdot(m_1+m_2)}\cdot\frac{L^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_G=-\frac{3L}{2\cdot(m_1+m_2)} \Rightarrow y_G=-\frac{3\cdot 0,5}{2\cdot 4} \Rightarrow y_G=-\frac{3}{16}\text{m}\cdot$$

mix-mix@sch.gr