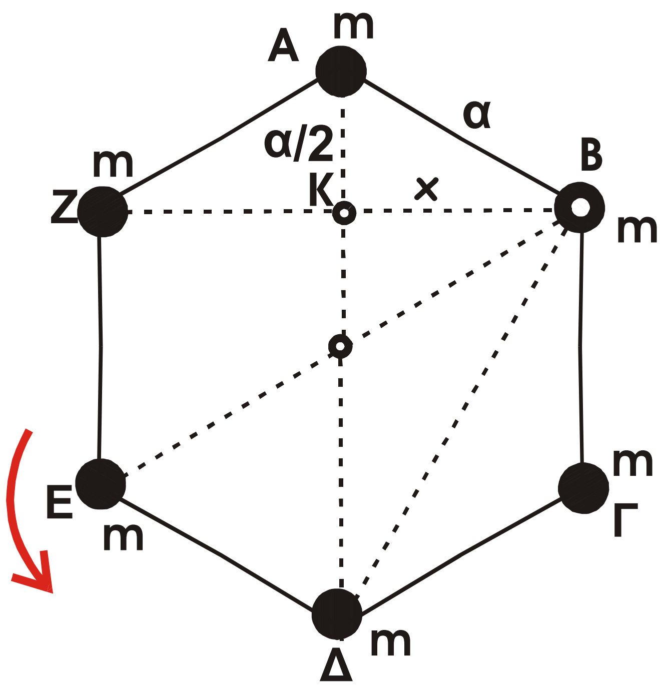
63. Έξι μάζες



Στις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ πλευράς α=$\sqrt{3}$m, βρίσκονται αντίστοιχα έξι ίσες μάζες m=0,2Kg που συγκολλούνται μεταξύ τους με αβαρείς ράβδους. Το σύστημα των μαζών μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο του εξαγώνου, που διέρχεται από το σημείο Β όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα αρχικά συγκρατείται στη θέση όπου η ΑΔ είναι κατακόρυφη.

Τότε:

α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος των μαζών τη στιγμή που αφήνουμε το σύστημα από την αρχική του θέση να περιστραφεί.

β) Ποια είναι η κατακόρυφη και ποια η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης που ασκείται από τον άξονα περιστροφής στο σύστημα τη στιγμή της εκκίνησης;

γ) Πόση είναι η δύναμη που ασκείται στο σύστημα από τον άξονα περιστροφής, όταν το σύστημα ξεκινώντας από την ηρεμία αποκτήσει τη μέγιστη γωνιακή του ταχύτητα;

δ) Αν το σύστημα περιστρέφεται οριζόντια γύρω από το κέντρο μάζας του, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, όση είναι αυτή που υπολογίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα, τότε πόση είναι η δύναμη στα άκρα της κάθε ράβδου;

Δίνεται g=10m/s^2.

Συνοπτική λύση:

α) Για τη ροπή αδράνειας του συστήματος γύρω από τον άξονα περιστροφής που περνάει από το Β θα έχουμε:

$I_{ολ(B)}= m_A\cdot α^2+m_Γ\cdot α^2+m_Δ\cdot(BΔ)^2+m_E\cdot(BE)^2+m_Z\cdot(BZ)^2$ με (ΒΖ)=(ΒΔ)=2(ΒΚ)=2x, όπου $x=\dfrac{α\sqrt{3}}{2}$=1,5m και (ΒΕ)=2α.

Τότε είναι

$I_{ολ(B)}= m_A\cdot α^2+m_Γ\cdot α^2+m_Δ\cdot(2x)^2+m_E\cdot(2α)^2+m_Z\cdot(2x)^2 \Rightarrow$

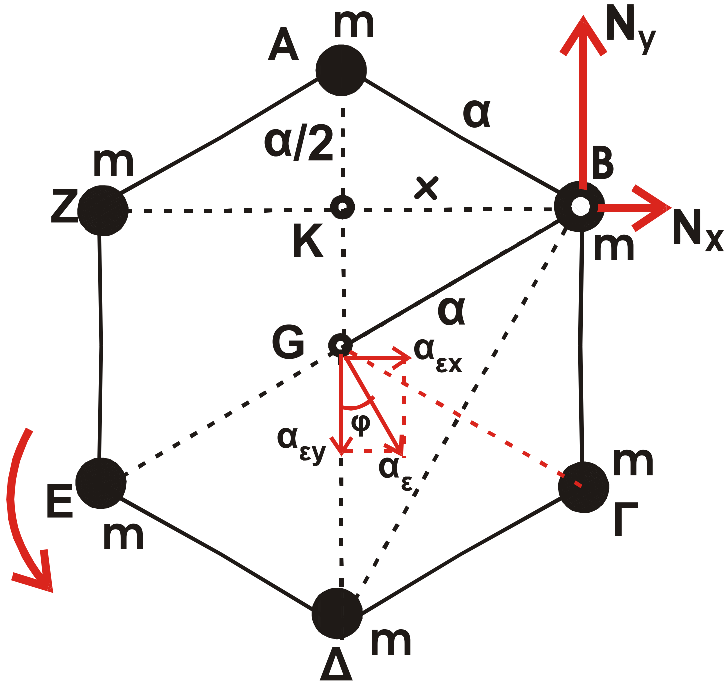
$\Rightarrow I_{ολ(B)}= m\cdot α^2+m\cdot α^2+4m\cdot x^2+4m\cdot α^2+4m\cdot x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_{ολ(B)}= 6m\cdot α^2+8m\cdot x^2 \Rightarrow I_{ολ(B)}= 6m\cdot α^2+8m\cdot \dfrac{3α^2}{4} \Rightarrow I_{ολ(B)}= 12m\cdot α^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_{ολ(B)}= 12\cdot 0,2\cdot 3 \Rightarrow I_{ολ(B)}=7,2$ Kg·m^2.

Τότε ισχύει,
$\Sigma\tau_{(B)} = I_{ολ(B)}\cdot\alpha_{γων}$ με $\Sigma\tau_{(B)} = \tau_A + \tau_\Gamma + \tau_\Delta + \tau_E + \tau_Z$
και $\tau_A = mgx$, $\tau_\Gamma = 0$, $\tau_\Delta = mgx$, $\tau_E = 2mgx$, $\tau_Z = 2mgx$.
Άρα έχουμε $\Sigma\tau_{(B)} = 6mgx \Rightarrow \Sigma\tau_{(B)} = 6\cdot 0{,}2\cdot 10\cdot 1{,}5 \Rightarrow \Sigma\tau_{(B)} = 18N\cdot m$ και $\Sigma\tau_{(B)} = I_{ολ(B)}\cdot\alpha_{γων} \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_{γων} = \dfrac{18}{7{,}2} = 2{,}5 rad/s^2$.

β)
Το G κάνει κυκλική κίνηση με κέντρο το B. Άρα η επιτρόχια επιτάχυνσή του είναι κάθετη στην GB.



Η επιτρόχια επιτάχυνση του G δίνεται από τη σχέση: $\alpha_\varepsilon = \alpha_{γων}\cdot(GB)$.
Το G δεν έχει ακόμα κεντρομόλο επιτάχυνση αφού μόλις αρχίζει να κινείται και άρα ω=0.
Ισχύει $(GB) = \alpha = \sqrt{3}\,m$. Οπότε έχουμε
$\alpha_\varepsilon = \alpha_{γων}\cdot(GB) = \dfrac{5}{2}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_\varepsilon = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\, m/s^2$.

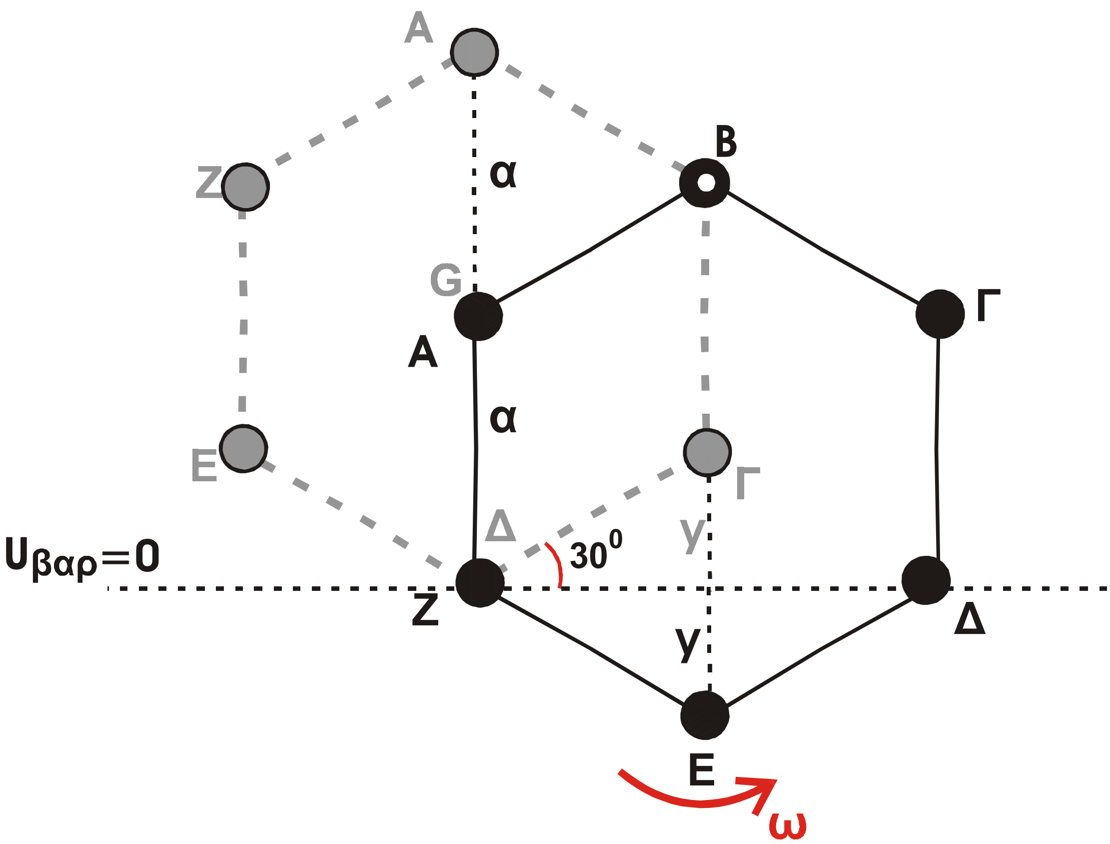
Για τη δύναμη την παράλληλη στη διεύθυνση GB, έχουμε: $\Sigma F_1 = 0$, ενώ για τη δύναμη την κάθετη στη διεύθυνση GB, έχουμε: $\Sigma F_2 = 6m\cdot\alpha_\varepsilon$.

Ακόμη για τις συνιστώσες της $\alpha_{εx}$ και $\alpha_{εy}$, έχουμε $\alpha_{εx} = \alpha_\varepsilon\cdot ημφ$ με $φ = 30^0$, άρα είναι
$\alpha_{εx} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}\, m/s^2$ και $\alpha_{εy} = \alpha_\varepsilon\cdot συνφ$, άρα είναι $\alpha_{εy} = \dfrac{15}{4}\, m/s^2$

Τότε για την κατακόρυφη αντίδραση N_y από τον άξονα περιστροφής (στο B) έχουμε,
$\Sigma F_y = 6m\cdot\alpha_{εy} \Rightarrow 6m\cdot g - N_y = 6m\cdot\alpha_{εy} \Rightarrow N_y = 6m\cdot(g - \alpha_{εy}) \Rightarrow N_y = 1{,}2\cdot 6{,}25 = 7{,}5N$

Και για την οριζόντια συνιστώσα της δύναμης N_x που ασκεί στη ράβδο ο άξονας περιστροφής έχουμε,
$N_x = 6m\cdot\alpha_{εx} \Rightarrow N_x = 1{,}2\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{4} = 1{,}5\cdot\sqrt{3}\,N$.

γ) Τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα ω, θα την έχουμε όταν η γωνιακή επιτάχυνση γίνει μηδέν ($\alpha_{γων} = 0$), δηλαδή όταν το σύστημα περιστραφεί κατά 60^0 και γίνει όπως φαίνεται στο σχήμα.



Εκείνη τη στιγμή είναι $\Sigma\tau_{(B)}= I_{ολ(B)}\cdot\alpha_{γων}=0 \Rightarrow \alpha_{γων}=0$.
Το σύστημα των μαζών έχει αρχικά δυναμική ενέργεια $U_{αρχ}$ με

$U_{αρχ}=m_A\cdot g(2\alpha)+2m_B\cdot g(\alpha+y)+ 2m_\Gamma\cdot g\cdot y$ με $y=\alpha\cdot ημ30^0= \frac{\alpha}{2}$.

Άρα $U_{αρχ}=2m\cdot g\cdot\alpha+2m\cdot g\cdot\frac{3\alpha}{2} + 2m\cdot g\cdot\frac{\alpha}{2} \Rightarrow U_{αρχ}=6m\cdot g\cdot\alpha$.

Η τελική του δυναμική ενέργεια $U_{τελ}$ είναι,

$U_{τελ}= m_B\cdot g(\alpha+y)+2m_A\cdot g\cdot\alpha+ - m_E\cdot g\cdot y \Rightarrow U_{τελ}= m\cdot g\cdot\frac{3\alpha}{2} +2m\cdot g\cdot\alpha+ - m\cdot g\cdot\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow U_{τελ}= 3m\cdot g\cdot\alpha$. Τότε από την Α.Δ.Μ.Ε: $K_{αρχ}+U_{αρχ}= K_{τελ}+U_{τελ} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6m\cdot g\cdot\alpha =\frac{1}{2}\cdot I_{ολ(B)}\cdot\omega^2+3m\cdot g\cdot\alpha \Rightarrow 3m\cdot g\cdot\alpha =\frac{1}{2}\cdot I_{ολ(B)}\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega^2=\frac{6m\cdot g\cdot\alpha}{I_{ολ(B)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega^2= \frac{5\sqrt{3}}{3}$ $(rad/s)^2$.

Τότε είναι $F_E=m\omega^2(2\alpha)$, $F_\Delta=F_Z=m\omega^2 2x= m\omega^2\alpha\sqrt{3}$, $F_A=F_\Gamma=m\omega^2\alpha$
Ακόμη $F_y=2F_{\Delta y}+2F_{\Gamma y}+F_E=2F_\Delta ημ60^0+2F_\Gamma ημ30^0+F_E \Rightarrow$

$\Rightarrow F_y=2m\omega^2\alpha\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} +2\, m\omega^2\alpha\frac{1}{2} +2\, m\omega^2\alpha \Rightarrow F_y=6m\omega^2\alpha$. Τότε $\Sigma F_y=0 \Rightarrow N_y+F_y=6mg \Rightarrow$

$\Rightarrow N_y=6mg-6m\omega^2\alpha \Rightarrow N_y=6m(g-\omega^2\alpha) \Rightarrow N_y=1{,}2\cdot(10-\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}) \Rightarrow N_y=6N$.

Ακόμη είναι $\Sigma F_x=F_{\Delta x}-F_{Zx} +F_{\Gamma x}-F_{Ax}=F_\Delta συν60^0-F_\Delta συν60^0+F_\Gamma συν30^0-F_\Gamma συν30^0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Sigma F_x=Nx=0$. Έτσι η δύναμη που ασκείται στο σύστημα από τον άξονα περιστροφής, όταν το σύστημα αποκτήσει τη μέγιστη γωνιακή του ταχύτητα είναι $N= N_y=6N$.

δ) Για περιστροφή σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από το G είναι $\alpha_{\gamma\omega\nu}=0$ και $\alpha_\varepsilon=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=0$. Οπότε η κάθε μάζα θα έχει μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_K=\omega^2\cdot\alpha$. Η κεντρομόλος δύναμη F_K που ασκείται στη κάθε μάζα είναι $F_K=m\cdot\omega^2\cdot\alpha \Rightarrow \Rightarrow F_K=0{,}2\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}\Rightarrow$ $F_K=1N$ και τόση θα είναι και η δύναμη στα άκρα της κάθε ράβδου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.