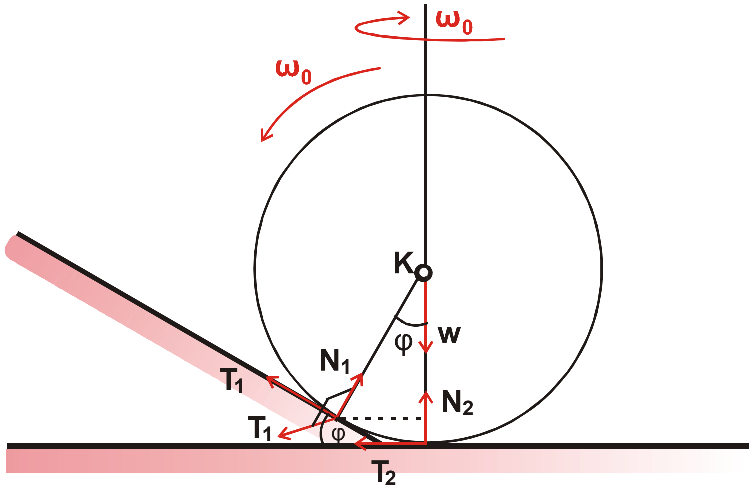
64_b. Ομογενής σφαίρα. Πότε θα σταματήσει η περιστροφή της;

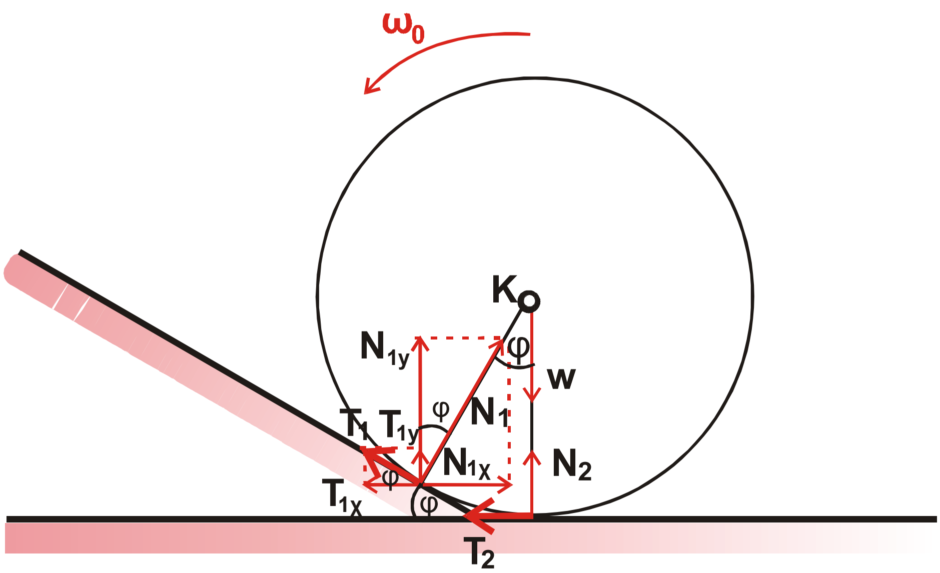


Η συμπαγής και ομογενής σφαίρα του σχήματος έχει ακτίνα R=0,2m και περιστρέφεται ανάμεσα στο οριζόντιο και το κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^0$, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Η σφαίρα περιστρέφεται ταυτόχρονα και γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο της ενώ βρίσκεται συνέχεια σε επαφή με τα δυο επίπεδα όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ της σφαίρας και των επιπέδων είναι μ=0,5 και η αρχική γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας γύρω από τον κάθε άξονα περιστροφής είναι ω_0=115 rad/s να βρεθεί σε πόσο χρόνο θα σταματήσει η περιστροφή της σφαίρας. Δίνεται για τη σφαίρα $I_{cm}=\frac{2}{5}mR^2$.

Ακόμη είναι $\sqrt{3}$=1,7 και $g=10m/s^2$.

Συνοπτική λύση:

Στη σφαίρα ασκούνται το βάρος του W και οι τριβές ολίσθησης T_1 και T_2 από το κεκλιμένο και το οριζόντιο επίπεδο αντίστοιχα καθώς και οι κάθετες δυνάμεις N_1 και N_2.



Ισχύει $T_1=\mu N_1 \Rightarrow N_1=\dfrac{T_1}{\mu}$ (1) και $T_2=\mu N_2 \Rightarrow N_2=\dfrac{T_2}{\mu}$ (2).

Η σφαίρα δε μετατοπίζεται οπότε από τη συνθήκη ισορροπίας στην οριζόντια διεύθυνση ισχύει $\Sigma F_x=0 \Rightarrow T_{1x}+T_2=N_{1x} \Rightarrow T_1\sigma\upsilon\nu\varphi+T_2=N_1\eta\mu\varphi$ (3)

Παρόμοια στην κατακόρυφη διεύθυνση ισχύει $\Sigma F_y=0 \Rightarrow T_{1y}+N_{1y}+N_2=w \Rightarrow$
$\Rightarrow T_1\eta\mu\varphi+N_1\sigma\upsilon\nu\varphi+N_2=w$ (4).

Από την (3) αντικαθιστώντας την (1) έχουμε $T_1\sigma\upsilon\nu\varphi+T_2=\dfrac{T_1}{\mu}\eta\mu\varphi$ (5)

Από την (4) αντικαθιστώντας τις (1) και (2) έχουμε $T_1\eta\mu\varphi+\dfrac{T_1}{\mu}\sigma\upsilon\nu\varphi+\dfrac{T_2}{\mu}=w \Rightarrow$

$\Rightarrow T_2=\mu w-\mu T_1\eta\mu\varphi-T_1\sigma\upsilon\nu\varphi$ (6). Τότε η (5) μέσω της (6) γίνεται

$T_1\sigma\upsilon\nu\varphi+T_2=\dfrac{T_1}{\mu}\eta\mu\varphi \Rightarrow T_1\sigma\upsilon\nu\varphi+\mu w-\mu T_1\eta\mu\varphi-T_1\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{T_1}{\mu}\eta\mu\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow T_1=\dfrac{\mu^2 w}{(\mu^2+1)\cdot\eta\mu\varphi}$ (7).

Και από την (6) $\Rightarrow T_2=\mu w-\mu T_1\eta\mu\varphi-T_1\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow T_2=\mu w-T_1(\mu\eta\mu\varphi+\sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow T_2=\mu w-\dfrac{\mu^2 w}{(\mu^2+1)\cdot\eta\mu\varphi}(\mu\eta\mu\varphi+\sigma\upsilon\nu\varphi)$ (8).

Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για τη σφαίρα έχουμε:

$\Sigma\tau_{(K)}=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow (T_1+T_2)R=\dfrac{2}{5}mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{5(T_1+T_2)}{2\cdot m\cdot R}$ μέσω των (7) και (8) έχουμε,

$\alpha_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{5\mu g}{2R}\,\dfrac{\mu(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)+\eta\mu\varphi}{(\mu^2+1)\cdot\eta\mu\varphi}$.

Με αντικατάσταση παίρνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu}=62{,}5\cdot\dfrac{0{,}5(1-\frac{\sqrt{3}}{2})+0{,}5}{(0{,}25+1)\cdot 0{,}5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=62{,}5\cdot\dfrac{0{,}575}{0{,}625} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=57{,}5\ rad/s^2$. Τότε $\omega=\omega_0-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t \Rightarrow t=\dfrac{\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow t=\dfrac{115}{57{,}5}=2s$.

Για την ιδιοπεριστροφή της σφαίρας το οριζόντιο επίπεδο δεν προκαλεί κάποια ροπή ενώ για το κεκλιμένο επίπεδο έχουμε,

$\Sigma\tau=I\cdot\alpha'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1R\eta\mu\varphi=\dfrac{2}{5}mR^2\cdot\alpha'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha'_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{5\cdot T_1\cdot\eta\mu\varphi}{2\cdot m\cdot R}$

Όμως $T_1=\dfrac{\mu^2 w}{(\mu^2+1)\cdot\eta\mu\varphi} \Rightarrow T_1=\dfrac{2w}{5}$ άρα έχουμε

$\alpha'_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{2\cdot m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi}{2\cdot m\cdot R}=\dfrac{g\cdot\eta\mu\varphi}{R}=25 rad/s^2$. Τότε $\omega=\omega_0-\alpha'_{\gamma\omega\nu}\cdot t' \Rightarrow t'=\dfrac{\omega_0}{\alpha'_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow t'=\dfrac{115}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow t'=4{,}6s$. Τελικά η περιστροφή της σφαίρας θα σταματήσει σε 4,6s.