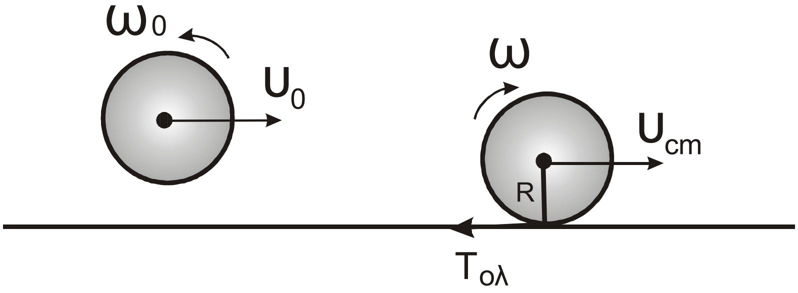
65. Ομογενής σφαίρα που ολισθαίνει

Μια ομογενής σφαίρα ακτίνας R=10cm και μάζας m=1Kg περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της και τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ρίχνεται κατά μήκος οριζόντιου επιπέδου με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0=7m/s$ και αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=70$ rad/s με τις φορές που φαίνονται στο σχήμα Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σφαίρας και επιπέδου είναι μ=0,2 τότε,



α) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή θα μηδενιστεί η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας.
β) Να βρείτε σε πόσο χρόνο θα αρχίσει η κύλιση της σφαίρας.
γ) Να υπολογιστεί το έργο της τριβής ολίσθησης από την αρχή και μέχρι να αρχίσει η κύλιση της σφαίρας. Δίνεται για τη σφαίρα $I_{cm}=\frac{2}{5}mR^2$ και $g=10m/s^2$.

Συνοπτική λύση:

α) Όταν η σφαίρα έρθει σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο κάνει και μεταφορική και στροφική κίνηση.
Για τη μεταφορική κίνηση έχουμε: $\Sigma F=m\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow T_{o\lambda}=m\,\alpha_{cm} \Rightarrow \mu mg=m\,\alpha_{cm} \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_{cm}=\mu\cdot g \Rightarrow \alpha_{cm}=2m/s^2$.

Για τη στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{o\lambda}\cdot R=\frac{2}{5}\cdot m\cdot R^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \mu mg=\frac{2}{5}\cdot m\cdot R\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{5\mu g}{2R} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=50rad/s^2$.

Αρχικά για την ταχύτητα του Κ.Μ έχουμε $\upsilon_{cm}=\upsilon_0=7m/s$ και
$\upsilon_\gamma=-\omega_0\cdot R=-7m/s$. Παρατηρούμε ότι $\omega_0\cdot R\neq\upsilon_0$ άρα έχουμε και ολίσθηση.
Ισχύει $\upsilon_{cm}=\upsilon_0-\alpha_{cm}\,t \Rightarrow$ $\boldsymbol{\upsilon_{cm}=7-2t}$. Ακόμη έχουμε $\omega=-\omega_0+\alpha_{\gamma\omega\nu}t \Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega=-70+50t}$.

Για $\omega=0 \Rightarrow t=\frac{\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow t=\frac{70}{50} \Rightarrow t=1,4s$. Τότε είναι $\upsilon_{cm}=\upsilon_1=7-2\cdot1,4=4,2m/s$.

Αλλιώς η στροφορμή της σφαίρας ως προς σημείο του εδάφους διατηρείται.

$L_0=L_1 \Rightarrow -\frac{2}{5}\cdot m\cdot R^2\cdot\omega_0+m\upsilon_0R=m\upsilon_1R \Rightarrow \upsilon_1=\upsilon_0-\frac{2}{5}\cdot R\cdot\omega_0 \Rightarrow \upsilon_1=7-\frac{2}{5}0,1\cdot70=4,2m/s$.

Τότε έχουμε

$-T\cdot t=m\upsilon_1-m\cdot\upsilon_0 \Rightarrow T\cdot t=m\cdot\upsilon_0-m\upsilon_1 \Rightarrow \mu mgt=m\cdot\upsilon_0-m\upsilon_1 \Rightarrow t=\frac{\upsilon_0-\upsilon_1}{\mu g}=\frac{7-4,2}{2}=1,4s$.

β) Η σφαίρα θα επιβραδύνεται αρχικά μεταφορικά και στροφικά ώστε να επέλθει αποκατάσταση της ισότητας $\upsilon_{cm}=\omega\cdot R$. Όμως για τη μεταφορική κίνηση ισχύει $\upsilon_{cm}=\upsilon_0-\alpha_{cm}\,t \Rightarrow \upsilon_{cm}=7-2t$ και για τη στροφική κίνηση $\omega=-\omega_0+\alpha_{\gamma\omega\nu}t \Rightarrow \omega=-70+50t$.
Άρα έχουμε: $\upsilon_0-\alpha_{cm}\,t=(-\omega_0+\alpha_{\gamma\omega\nu}t)\cdot R \Rightarrow 7-2t=-7+5t \Rightarrow 7t=14 \Rightarrow t=2s$.

Δηλαδή σε 1,4 s το ω θα μηδενιστεί και για άλλα 0,6s θα έχουμε ολίσθηση, οπότε τη χρονική στιγμή t=2s θα αρχίσει η κύλιση.
Αλλιώς η στροφορμή της σφαίρας ως προς σημείο του εδάφους διατηρείται.

$L_2=L_1 \Rightarrow \frac{2}{5}\cdot m\cdot R^2\cdot\omega+m\upsilon_{cm}R= m\upsilon_1 R\Rightarrow \frac{2}{5}\cdot m\cdot\upsilon_{cm}\cdot R+m\upsilon_{cm}R= m\upsilon_1 R\Rightarrow \frac{7}{5}\ \upsilon_{cm}= \upsilon_1\Rightarrow$

$\Rightarrow\upsilon_{cm}= \frac{5}{7}\cdot\upsilon_1\Rightarrow \upsilon_{cm}=\frac{5}{7}\cdot 4{,}2=3m/s$. Τότε έχουμε

$-T\cdot t= m\upsilon_{cm} -m\cdot\upsilon_0\Rightarrow T\cdot t=m\cdot\upsilon_0-m\upsilon_{cm}\Rightarrow \mu mgt= m\cdot\upsilon_0-m\upsilon_{cm}\Rightarrow t=\frac{\upsilon_0-\upsilon_{cm}}{\mu g}=\frac{7-3}{2}=2s.$

γ) 1. $I= I_{cm}=\frac{2}{5}mR^2\Rightarrow I=\frac{2}{5}\cdot 10^{-2}\Rightarrow I=\frac{1}{250}\ Kg\cdot m^2$

$K_{αρχ}=\frac{1}{2}I\ \omega_0^2+\frac{1}{2}m\upsilon_0^{\ 2}$ ή $K_{αρχ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{250}\cdot 4900+\frac{1}{2}\cdot 49\Rightarrow K_{αρχ}=\frac{98+245}{10}=34{,}3J.$

$K_{τελ}==\frac{1}{2}I\ \omega^2+\frac{1}{2}m\upsilon^2$ τη στιγμή (t=2s) που αρχίζει η κύλιση έχουμε $\upsilon_{cm}=7-2t=3m/s$ και ω= -70+50t=30 rad/s. Άρα $K_{τελ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{250}\cdot 900+\frac{1}{2}\cdot 9\Rightarrow K_{τελ}=\frac{18+45}{10}=6{,}3J.$

Το έργο της τριβής ολίσθησης είναι όσο και η «απώλεια» ενέργειας,
άρα $W_{Τολ}=K_{τελ}-K_{αρχ}=6{,}3-34{,}3\Rightarrow W_{Τολ}= -28J.$

2.Ακόμη μπορούμε να πούμε ότι το Κ.Μ της σφαίρας μετατοπίζεται στο οριζόντιο επίπεδο κατά $s=\upsilon_0\cdot t-\frac{1}{2}\alpha_{cm}\cdot t^2=7\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=10m$ ενώ το διάστημα που διαγράφει η σφαίρα κυλιόμενη είναι $s' =R\cdot\theta$ με $\theta= -\omega_0\cdot t+\frac{1}{2}\alpha_{γων}\cdot t^2\Rightarrow \theta= -70\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 4\Rightarrow$

$\Rightarrow$ θ= -140+100⇒ θ= -40rad και $s'=R\cdot\theta= -4m$. Δηλαδή η σφαίρα λόγω κύλισης μετατοπίζεται προς τα αριστερά κατά 4m. Άρα η σφαίρα έχει μετατοπιστεί ολισθαίνοντας κατά $\Delta S=s-s'\Rightarrow \Delta S=10-(-4)=14m$.

Για την τριβή ολίσθησης έχουμε $T_{ολ}=\mu mg=2N$ και τότε η η «απώλεια» ενέργειας μέσω του έργου της τριβής ολίσθησης είναι $W_{Τολ}= - T_{ολ}\cdot\Delta s=-2\cdot 14=-28J$.

3.Το κατώτερο σημείο της σφαίρας που βρίσκεται σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο έχει κάθε στιγμή ταχύτητα $V=\upsilon_{cm}+\omega\cdot R\Rightarrow V= \upsilon_0-\alpha_{cm}\cdot t+\omega_0\cdot R -\alpha_{γων}\cdot R\cdot t\Rightarrow$
$\Rightarrow V= \upsilon_0+\omega_0\cdot R -(\alpha_{cm} +\alpha_{γων}\cdot R)\cdot t\Rightarrow V= V_0-a\cdot t$
με $V_0=\upsilon_0+\omega_0\cdot R=7+7=14m/s$ ενώ για το μέτρο της επιτάχυνσης είναι
$a= \alpha_{cm} +\alpha_{γων}\cdot R =2+50\cdot 0{,}1=7m/s^2$ άρα έχουμε $V= V_0-a\cdot t\Rightarrow V= 14-7\cdot t$. Οπότε τη χρονική στιγμή t=2s που σταματάει η ολίσθηση είναι $V= 14-7\cdot 2\Rightarrow V=0m/s$. Πράγματι για κύλιση χωρίς ολίσθηση το κατώτερο σημείο της σφαίρας έχει ταχύτητα V=0 m/s.
Άρα σε χρόνο t=2s το κατώτερο σημείο της σφαίρας θα έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta s=V_0\cdot t-\frac{1}{2}a\cdot t^2=14\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 4=14m$. Τότε $W_{Τολ} = -T\cdot\Delta s=-2\cdot 14=-28J$, όπως και προηγουμένως.