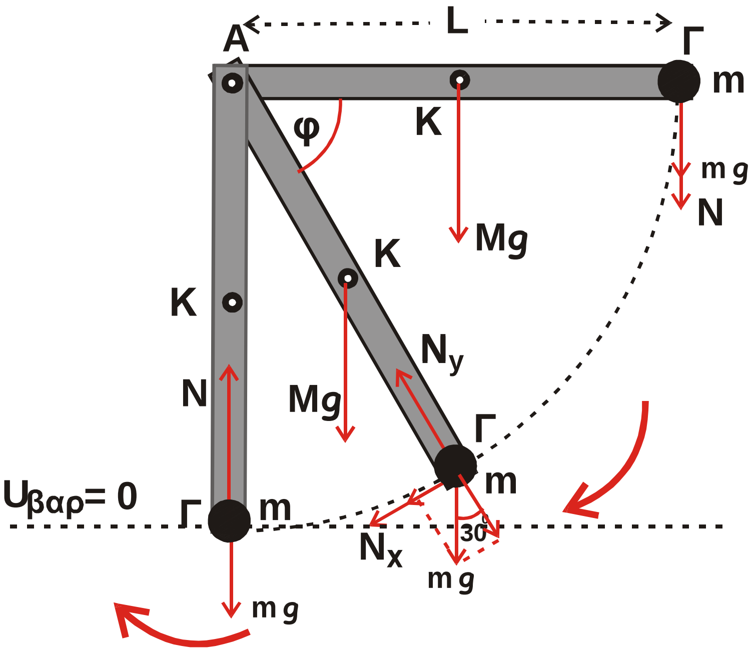
66. Ομογενής ράβδος που περιστρέφεται

Λεπτή ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους L=1m και μάζας M=3Kg, μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Α. Στο άλλο άκρο της Γ υπάρχει στερεωμένη σημειακή σφαίρα μάζας m=0,5Kg. Η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση και τη χρονική στιγμή $t_0=0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να περιστραφεί. Για τη χρονική στιγμή $t_0=0$ που το σύστημα βρίσκεται στην οριζόντια θέση να υπολογιστούν,



Α)α) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος – σφαίρα.
β) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής για τη ράβδο και για τη σφαίρα ξεχωριστά.
γ) Η δύναμη N που δέχεται η σφαίρα από τη ράβδο και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας m και της ράβδου M, που οφείλεται στη δύναμη N μεταξύ ράβδου και σφαίρας, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής που οφείλεται στο βάρος της σφαίρας m και της ράβδου M αντίστοιχα.
Β) Να απαντηθούν τα παραπάνω ερωτήματα όταν το σύστημα έχει στραφεί κατά 60^0.
Γ) Πόση είναι η συνολική δύναμη που δέχεται η μάζα m από τη ράβδο όταν το σύστημα γίνει κατακόρυφο;
Δ) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα περιστροφής όταν:
α) το σύστημα ράβδος - m είναι οριζόντιο
β) το σύστημα ράβδος - m είναι κατακόρυφο και
γ) όταν το σύστημα ράβδος - m έχει περιστραφεί κατά γωνία $φ=60^0$.

Δίνεται για τη ράβδο $I_{cm}=\frac{1}{12}M{\cdot}L^2$ και $g=10m/s^2$.

Συνοπτική λύση:

α) $I_ρ=I_{cm}+M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow I_ρ=\frac{1}{3}M{\cdot}L^2$ και $I_{ολ}=I_ρ+mL^2 \Rightarrow I_{ολ}=\frac{1}{3}M{\cdot}L^2+mL^2=1+0,5 \Rightarrow$
$\Rightarrow I_{ολ}=1,5Kg{\cdot}m^2$

$$Στ=\frac{ΔL}{Δt}=I_{ολ}{\cdot}α_{γων}=Mg\frac{L}{2}+mgL \Rightarrow \frac{ΔL}{Δt}=15+5 \Rightarrow \frac{ΔL}{Δt}=20\ Kg{\cdot}m^2/s^2.$$

Ακόμη $\frac{ΔL}{Δt}=I_{ολ}{\cdot}α_{γων} \Rightarrow α_{γων}=\frac{40}{3}\ rad/s^2$.

β) $(\frac{\Delta L}{\Delta t})_m = I_m \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = mL^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow (\frac{\Delta L}{\Delta t})_m = 0{,}5 \cdot \frac{40}{3} \Rightarrow (\frac{\Delta L}{\Delta t})_m = \frac{20}{3}$ Kg·m²/s².

$(\frac{\Delta L}{\Delta t})_M = I_\rho \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{3} M \cdot L^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow (\frac{\Delta L}{\Delta t})_M = \frac{40}{3}$ Kg·m²/s².

Τότε $(\frac{\Delta L}{\Delta t})_m + (\frac{\Delta L}{\Delta t})_M = \frac{20}{3} + \frac{40}{3} = 20$ Kg·m²/s² $= \frac{\Delta L}{\Delta t}$.

γ) Στη σφαίρα ασκούνται δύο δυνάμεις το βάρος της mg και η δύναμη N από τη ράβδο.
Τότε είναι $\Sigma F = m\alpha_\varepsilon$, όπου α_ε είναι η επιτρόχιος επιτάχυνση της μάζας m στο άκρο Γ της ράβδου. Ισχύει $\alpha_\varepsilon = \frac{\Delta \upsilon_{\gamma\rho}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\omega L)}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \cdot L = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot L$ (L το μήκος της ράβδου) ή $\alpha_\varepsilon = \frac{40}{3}$ m/s². Ισχύει $\Sigma F = m\alpha_\varepsilon \Rightarrow N + mg = m\alpha_\varepsilon \Rightarrow N = m(\alpha_\varepsilon - g) \Rightarrow N = 0{,}5(\frac{40}{3} - 10) \Rightarrow$
$\Rightarrow N = \frac{5}{3} = 1{,}67$N. Ακόμη στη ράβδο ασκείται από τη σφαίρα μια δύναμη N΄ αντίθετη της N.

$(\frac{\Delta L}{\Delta t})_{mg} = mgL = 5$ Kg·m²/s² και $(\frac{\Delta L}{\Delta t})_N = N \cdot L = \frac{5}{3}$ Kg·m²/s². Άρα
$(\frac{\Delta L}{\Delta t})_m = (\frac{\Delta L}{\Delta t})_{mg} + (\frac{\Delta L}{\Delta t})_N = 5 + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$ Kg·m²/s².

Παρόμοια για τη ράβδο μάζας M, έχουμε,

$(\frac{\Delta L}{\Delta t})_{Mg} = Mg\frac{L}{2} = 15$ Kg·m²/s² και $(\frac{\Delta L}{\Delta t})_{N'} = -N \cdot L = -\frac{5}{3}$ Kg·m²/s². Τελικά
$(\frac{\Delta L}{\Delta t})_M = (\frac{\Delta L}{\Delta t})_{Mg} + (\frac{\Delta L}{\Delta t})_{N'} = 15 - \frac{5}{3} = \frac{40}{3}$ Kg·m²/s².

Β)α) $\Sigma\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = I_{o\lambda} \cdot \alpha'_{\gamma\omega\nu} = Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi + mgL\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = (15+5) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = 10$ Kg·m²/s².
Ακόμη $\frac{\Delta L}{\Delta t} = I_{o\lambda} \cdot \alpha'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha'_{\gamma\omega\nu} = \frac{20}{3}$ rad/s².

β) $(\frac{\Delta L}{\Delta t})_m = I_m \cdot \alpha'_{\gamma\omega\nu} = mL^2 \cdot \alpha'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow (\frac{\Delta L}{\Delta t})_m = 0{,}5 \cdot \frac{20}{3} \Rightarrow (\frac{\Delta L}{\Delta t})_m = \frac{10}{3}$ Kg·m²/s².

Ακόμη $(\frac{\Delta L}{\Delta t})_M = I_\rho \cdot \alpha'_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{3} M \cdot L^2 \cdot \alpha'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow (\frac{\Delta L}{\Delta t})_M = \frac{20}{3}$ Kg·m²/s².
Ισχύει $(\frac{\Delta L}{\Delta t})_m + (\frac{\Delta L}{\Delta t})_M = \frac{10}{3} + \frac{20}{3} = 10$ Kg·m²/s² $= \frac{\Delta L}{\Delta t}$

γ) Για τη σφαίρα έχουμε $ΣF=mα'_ε$, όπου $α'_ε=α'_{γων}\cdot L$ ή $α'_ε=\frac{20}{3}$ m/s^2.

Τότε $ΣF=mα'_ε \Rightarrow N_x+mgημ30^0=mα'_ε \Rightarrow N_x=m(α'_ε-g\cdot ημ30^0) \Rightarrow$

$\Rightarrow N_x=0{,}5(\frac{20}{3}-5) \Rightarrow N_x=\frac{5}{6}N$.

$\Rightarrow N=\frac{5}{3}N$. Στη ράβδο ασκείται από τη σφαίρα μια δύναμη N΄ αντίθετη της N.

Τότε $(\frac{ΔL}{Δt})_{mg}=mgLσυν60^0=\frac{5}{2}Kg\cdot m^2/s^2$ και $(\frac{ΔL}{Δt})_{Nx}=N_x\cdot L=\frac{5}{6}$ $Kg\cdot m^2/s^2$. Άρα

$(\frac{ΔL}{Δt})_m=(\frac{ΔL}{Δt})_{mg}+(\frac{ΔL}{Δt})_N=\frac{5}{2}+\frac{5}{6}=\frac{10}{3}Kg\cdot m^2/s^2$.

Παρόμοια για τη ράβδο μάζας M, έχουμε,

$(\frac{ΔL}{Δt})_{Mg}=Mg\frac{L}{2}\cdot συν60^0=\frac{15}{2}$ $Kg\cdot m^2/s^2$ και $(\frac{ΔL}{Δt})_{N'}=-N_x\cdot L=-\frac{5}{6}$ $Kg\cdot m^2/s^2$. Τελικά

$(\frac{ΔL}{Δt})_M=(\frac{ΔL}{Δt})_{Mg}+(\frac{ΔL}{Δt})_{Nx'}=\frac{15}{2}-\frac{5}{6}=\frac{20}{3}Kg\cdot m^2/s^2$.

Γ) Όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη είναι $\frac{ΔL}{Δt}=I_{ολ}\cdot α_{γων}=0$ και $α_{γων}=0$ rad/s^2 και

$α_ε=α_{γων}\cdot L=0$ m/s^2. Όμως έχουμε κεντρομόλο επιτάχυνση $α_κ=\frac{υ_{γρ}^2}{L} \Rightarrow$

$\Rightarrow α_κ=ω^2\cdot L$. Ισχύει, $ΣF=mα_κ \Rightarrow N-mg=mα_κ \Rightarrow N=m(α_κ+g) \Rightarrow N=m(ω^2\cdot L+g)$.

Α.Δ.Μ.Ε: $\overset{0}{\cancel{K_{αρχ}}}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \Rightarrow (M+m)gL=\frac{1}{2}I_{ολ}ω^2+Mg\frac{L}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 35=\frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot ω^2+15 \Rightarrow ω^2=\frac{80}{3}$ $(rad/s)^2$.

Τελικά $N=m(ω^2\cdot L+g) \Rightarrow N=0{,}5(\frac{80}{3}+10) \Rightarrow N=\frac{55}{3}=18{,}3N$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Όταν η ράβδος έχει περιστραφεί κατά $φ=60^0$ έχουμε:

Α.Δ.Μ.Ε: $K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \Rightarrow$

$\Rightarrow (M+m)gL=\frac{1}{2}I_{ολ}ω^2+MgL(1-\frac{1}{2}συν30^0)+mgL(1-συν30^0) \Rightarrow$

$\Rightarrow 35=\frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot ω^2+30-30\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+5-5\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot ω^2=10\cdot\sqrt{3} \Rightarrow ω^2=\frac{40\sqrt{3}}{3}$ $(rad/s)^2$.

$N_y-mgσυν30^0=mα_κ \Rightarrow N_y=m(α_κ+g\,συν30^0) \Rightarrow N_y=m(ω^2\cdot L+g\cdot συν30^0) \Rightarrow$

$\Rightarrow N_y=0{,}5(\frac{40\sqrt{3}}{3}+5\cdot\sqrt{3}) \Rightarrow N_y=\frac{55\sqrt{3}}{6}N$. Ακόμη σε εκείνη τη θέση είναι $N_x=\frac{5}{6}N$.

Τελικά για το μέτρο της δύναμης που δέχεται η μάζα m από τη ράβδο έχουμε

$N=\sqrt{N_x^2+N_y^2} \Rightarrow N=\frac{5}{3}\cdot\sqrt{91}N=16N$.

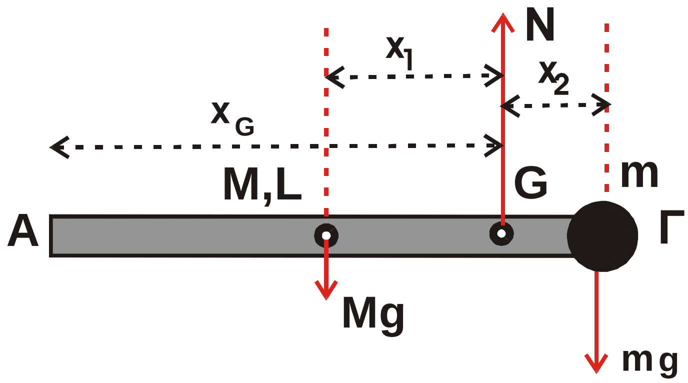
Δ) **Το υλικό σημείο ενός μηχανικού στερεού που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του στερεού όταν ασκούνται σ' αυτό όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό ονομάζεται *κέντρο μάζας* του στερεού.**

Όταν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σ' ένα υλικό σημείο είναι μηδέν τότε αυτό ισορροπεί.

Τότε ένα υλικό σημείο του μηχανικού στερεού που θα ισορροπεί όταν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν, είναι αυτό για το οποίο και η συνισταμένη των ροπών ως προς αυτό είναι μηδέν. Αυτό το σημείο του στερεού θα συμπεριφέρεται ακριβώς όπως και ένα υλικό σημείο στο οποίο η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν. Οποιοδήποτε άλλο σημείο θα περιστρέφεται για ΣF=0 και δεν θα είναι ακίνητο.

Αυτό το σημείο G είναι το κέντρο μάζας του συστήματος ράβδος - μάζα m.

Έστω λοιπόν ότι G είναι το σημείο από το οποίο όταν διέρχεται ο άξονας περιστροφής τότε το σύστημα ράβδος - μάζα m ισορροπεί οριζόντια.

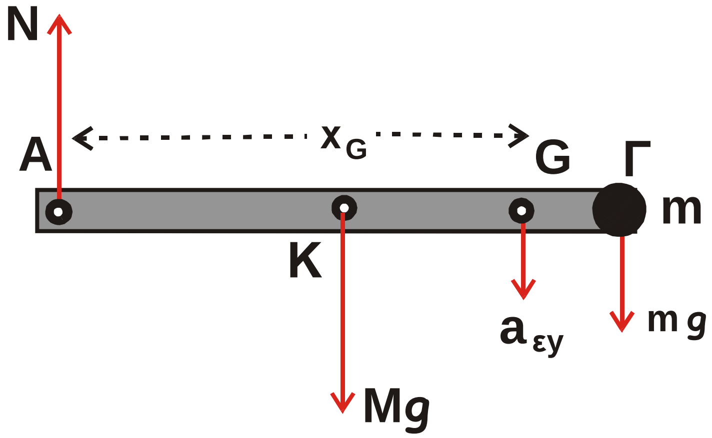


Τότε ισχύει $\Sigma F=0 \Rightarrow Mg+mg-N=0 \Rightarrow N=(M+m)\cdot g$.

Ενώ από τη συνθήκη ισορροπίας για τη στροφική κίνηση και ως προς το σημείο G έχουμε: $\Sigma\tau_{(G)}=0 \Rightarrow \tau_W+\tau_N-\tau_w=0$, όπου $\tau_N=0$. Άρα $M\cdot g\cdot x_1-m\cdot g\cdot x_2=0 \Rightarrow x_2=\dfrac{M}{m}\cdot x_1$.

Όμως ισχύει $x_1+x_2=\dfrac{L}{2}$ ή $x_1+\dfrac{M}{m}\cdot x_1=\dfrac{L}{2}$ ή $x_1=\dfrac{m}{m+M}\cdot\dfrac{L}{2}=\dfrac{1}{14}$ m ή $x_G=\dfrac{L}{2}+x_1=\dfrac{4}{7}$ m.

α) Για να βρούμε την κατακόρυφη αντίδραση N από τον άξονα περιστροφής (στο A) όταν η ράβδος είναι **οριζόντια** πρέπει να βρούμε την επιτάχυνση $\alpha_{\varepsilon\gamma}$ του κέντρου μάζας G, του συστήματος.



Τότε έχουμε $\alpha_{\varepsilon\gamma}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot x_G=\frac{40}{3}\cdot\frac{4}{7}\Rightarrow \alpha_{\varepsilon\gamma}=\frac{160}{21}\,m/s^2$ και για το σύστημα ράβδος - μάζα m στην αρχική οριζόντια θέση έχουμε $\Sigma F=(M+m)\cdot\alpha_{\varepsilon\gamma}\Rightarrow(M+m)\cdot g-N=(M+m)\cdot\alpha_{\varepsilon\gamma}\Rightarrow$
$\Rightarrow 35-N=3{,}5\cdot\frac{160}{21}\Rightarrow 35-N=\frac{80}{3}\Rightarrow N=\frac{25}{3}=8{,}3N.$

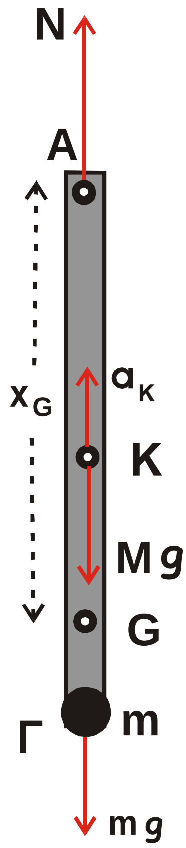
β) Όταν η ράβδος γίνει **κατακόρυφη** $\alpha_{\gamma\omega\nu}=0\ rad/s^2$ και $\alpha_\varepsilon=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot x_G=0\ m/s^2$. Όμως έχουμε κεντρομόλο επιτάχυνση

$\alpha_\kappa=\frac{\upsilon^2_{\gamma\rho}}{x_G}\Rightarrow \alpha_\kappa=\omega^2\cdot x_G.$

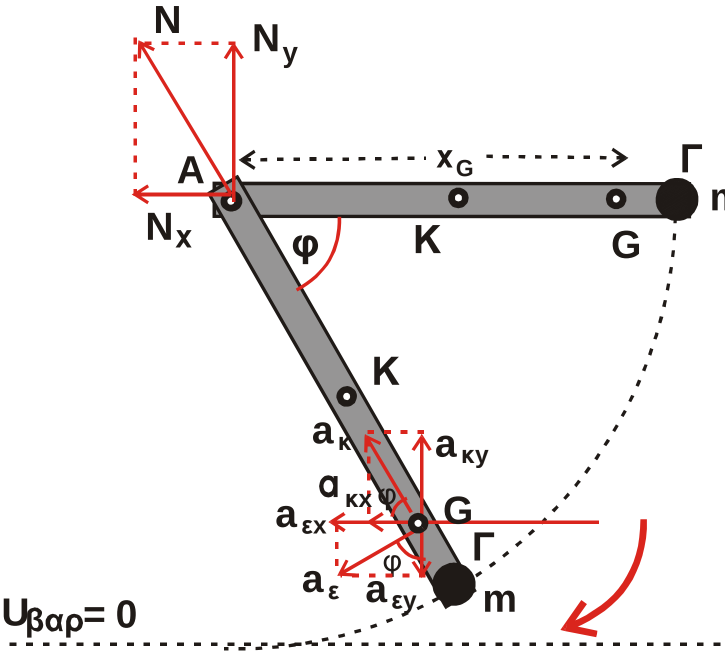
Ισχύει, $\Sigma F=(M+m)\cdot\alpha_\kappa\Rightarrow N-(M+m)\cdot g=(M+m)\alpha_\kappa\Rightarrow$
$\Rightarrow N=(M+m)\cdot(\alpha_\kappa+g)\Rightarrow$

$N=(M+m)\cdot(\omega^2\cdot x_G+g)$ όπου $\omega^2=\frac{80}{3}\ (rad/s)^2$.

Τελικά $N=3{,}5(\frac{80}{3}\cdot\frac{4}{7}+10)\Rightarrow N=\frac{265}{3}=88{,}3N.$



γ) Όταν η ράβδος περιστραφεί κατά 60^0 $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{20}{3}$ rad/s^2.rad/s^2 και



$\alpha_\varepsilon=$ $\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot x_G$

$=\dfrac{20}{3}\cdot\dfrac{4}{7}=\dfrac{80}{21}$ m/s^2. Όμως έχουμε και κεντρομόλο επιτάχυνση

$\alpha_\kappa=\dfrac{\upsilon^2_{\gamma\rho}}{x_G}\Rightarrow \alpha_\kappa=\omega^2\cdot x_G$ με $\omega^2=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$ (rad/s)^2. Άρα $\alpha_\kappa=\omega^2\cdot x_G=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{4}{7}\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_\kappa=\dfrac{160\sqrt{3}}{21}$ m/s^2.

Από το σχήμα έχουμε $\alpha_{\varepsilon x}=\alpha_\varepsilon\cdot\eta\mu\varphi=\dfrac{80}{21}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \alpha_{\varepsilon x}=\dfrac{40\sqrt{3}}{21}$ m/s^2,

και $\alpha_{\varepsilon y}=\alpha_\varepsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{80}{21}\cdot\dfrac{1}{2}\Rightarrow \alpha_{\varepsilon y}=\dfrac{40}{21}$ m/s^2.

Επίσης $\alpha_{\kappa x}=\alpha_\kappa\cdot$ συνφ $=\dfrac{160\sqrt{3}}{21}\cdot\dfrac{1}{2}\Rightarrow \alpha_{\kappa x}=\dfrac{80\sqrt{3}}{21}$ m/s^2,

και $\alpha_{\kappa y}=\alpha_\kappa\cdot$ ημφ $=\dfrac{160\sqrt{3}}{21}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \alpha_{\kappa y}=\dfrac{80}{7}$ m/s^2.

Ισχύει, $\Sigma F_y=(M+m)\cdot(\alpha_{\kappa y}-\alpha_{\varepsilon y})\Rightarrow N_y-(M+m)\cdot g=(M+m)\cdot(\alpha_{\kappa y}-\alpha_{\varepsilon y})\Rightarrow$

$\Rightarrow N_y=(M+m)\cdot(\alpha_{\kappa y}-\alpha_{\varepsilon y}+g)\Rightarrow N_y=3{,}5\cdot\left(\dfrac{80}{7}-\dfrac{40}{21}+10\right)\Rightarrow N_y=\dfrac{205}{3}$N. Ακόμη

ισχύει, $\Sigma F_x=(M+m)\cdot(\alpha_{\kappa x}+\alpha_{\varepsilon x})\Rightarrow N_x=3{,}5\cdot\left(\dfrac{80\sqrt{3}}{21}+\dfrac{40\sqrt{3}}{21}\right)\Rightarrow N_x=20\sqrt{3}$ N.

Τότε $N=\sqrt{N_x^2+N_y^2}\Rightarrow N=76{,}7$N με $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{N_y}{N_x}=1{,}97$ ή $\theta=63^0$.