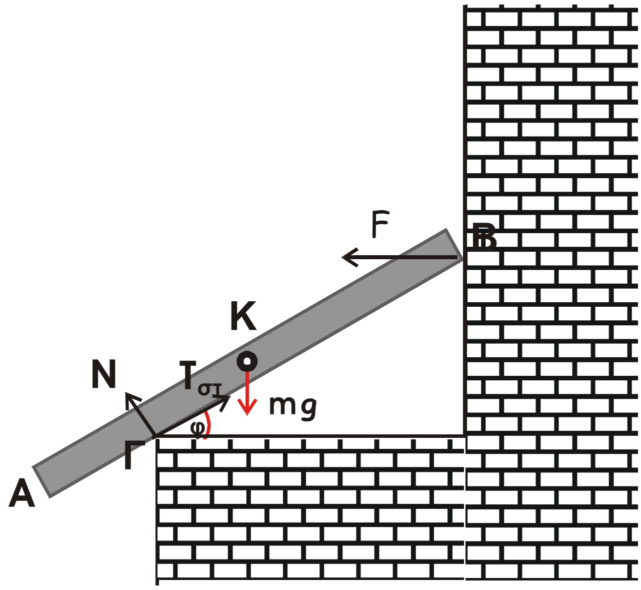
67. Ομογενής ράβδος που ισορροπεί οριακά

Λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους L=1,6m και μάζας m=3Kg, είναι ακουμπισμένη σε λείο κατακόρυφο τοίχο ενώ το $\frac{1}{4}$ του μήκους της προεξέχει από ένα σκαλοπάτι όπως φαίνεται στο σχήμα και η ράβδος ισορροπεί.



Α) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στη ράβδο και το σκαλοπάτι είναι $\mu=\sqrt{3}$, να βρεθεί η τιμή της γωνίας φ, που πρέπει να σχηματίζει η ράβδος με το σκαλοπάτι ώστε η ράβδος να μη γλιστρά.

Β) Στο σημείο Γ στηρίζουμε τη ράβδο μ' ένα μεντεσέ ώστε αυτή να μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Κάποια στιγμή τοποθετούμε πάνω στη σανίδα και στο άκρο της Β, έναν κύλινδρο μάζας Μ=8Kg οποίος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να βρείτε σε ποια απόσταση από το Γ πρέπει να βρίσκεται ο κύλινδρος καθώς κατέρχεται ώστε η σανίδα μόλις να περιστραφεί (ανατραπεί). Ποια είναι εκείνη τη στιγμή η ταχύτητα του κυλίνδρου;

Δίνεται $g=10m/s^2$ και για τον κύλινδρο $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$.

Συνοπτική λύση:

Α) $\Sigma\tau_{(\Gamma)}=0 \Rightarrow mg\frac{L}{4}\sigma\upsilon\nu\varphi=F\frac{3L}{4}\eta\mu\varphi \Rightarrow F=\frac{g}{\varepsilon\varphi\varphi}$ (1)

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow T_{\sigma\tau}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=F+N\eta\mu\varphi$ (2) και

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow T_{\sigma\tau}\cdot\eta\mu\varphi+N\sigma\upsilon\nu\varphi=mg \Rightarrow T_{\sigma\tau}\cdot\eta\mu\varphi=mg-N\sigma\upsilon\nu\varphi$ (3)

Διαιρώντας κατά μέλη τις (3) και (2) προκύπτει $\varepsilon\varphi\varphi=\frac{mg\text{-}N\sigma\upsilon\nu\varphi}{F+N\eta\mu\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow F\varepsilon\varphi\varphi+N\eta\mu\varphi\varepsilon\varphi\varphi=mg\text{-}N\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow g+N\eta\mu\varphi\varepsilon\varphi\varphi=3g\text{-}N\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow N=\frac{2g}{\sigma\upsilon\nu\varphi+\eta\mu\varphi\cdot\varepsilon\varphi\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow N=\frac{2g}{\sigma\upsilon\nu\varphi+\frac{\eta\mu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}} \Rightarrow N=2g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi.$ (4)

Τότε από τη σχέση (2) προκύπτει: $T_{\sigma\tau}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=F+N\eta\mu\varphi \Rightarrow$

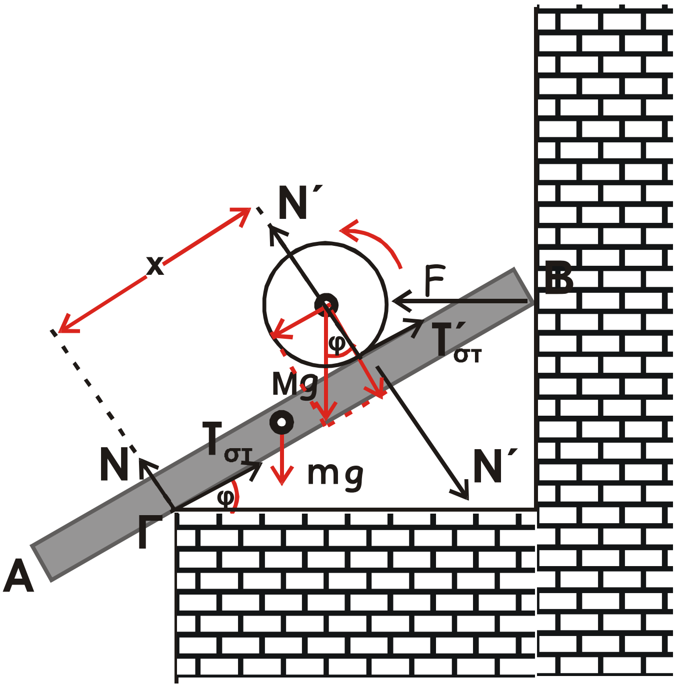
$\Rightarrow T_{\sigma\tau}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{g}{\varepsilon\varphi\varphi}+2g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\;\eta\mu\varphi \Rightarrow T_{\sigma\tau}=\dfrac{g}{\eta\mu\varphi}+2g\cdot\eta\mu\varphi.$ (5)

Ισχύει $T_{\sigma\tau}\leq\mu N\Rightarrow \dfrac{g}{\eta\mu\varphi}+2g\cdot\eta\mu\varphi\leq\mu\cdot 2g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow \dfrac{1}{\eta\mu\varphi}+2\cdot\eta\mu\varphi\leq 2\cdot\mu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\eta\mu\varphi}+2\cdot\eta\mu\varphi\leq 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$ με $0<\eta\mu\varphi<1$.

Έχουμε, $1+2\cdot\eta\mu^2\varphi\leq 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow 3\cdot\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon^2\varphi\leq 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\cdot\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon^2\varphi-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\eta\mu\varphi\leq 0\Rightarrow (\sqrt{3}\,\eta\mu\varphi)^2+\sigma\upsilon^2\varphi-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\eta\mu\varphi\leq 0\Rightarrow$
$\Rightarrow(\sqrt{3}\,\eta\mu\varphi-\sigma\upsilon\nu\varphi)^2\leq 0$ η οποία αληθεύει μόνο για $\sqrt{3}\,\eta\mu\varphi-\sigma\upsilon\nu\varphi=0\Rightarrow\varepsilon\varphi\varphi=\sqrt{3}/3$ ή $\varphi=30^0$. *Περίεργο!!!*

Β) $\Sigma\tau_{(\Gamma)}=0\Rightarrow$
$mg\dfrac{L}{4}\sigma\upsilon\nu\varphi+N'\cdot x=F\dfrac{3L}{4}\eta\mu\varphi$
με $N'=Mg\sigma\upsilon\nu\varphi$. Τη στιγμή της ανατροπής είναι $F=0$, άρα έχουμε,
$mg\dfrac{L}{4}\sigma\upsilon\nu\varphi+N'\cdot x=0\Rightarrow$
$\Rightarrow mg\dfrac{L}{4}\sigma\upsilon\nu\varphi=-\,Mg\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot x\Rightarrow$
$\Rightarrow x=-\dfrac{mL}{4M}=-0{,}15m$ ή 15cm
κάτω από το Γ. *Παρατηρούμε ότι το x είναι ανεξάρτητο της γωνίας φ.*



Για την κίνηση του κυλίνδρου έχουμε,
Μεταφορική κίνηση:
$Mg\eta\mu\varphi-T'_{\sigma\tau}=M\alpha_{cm}$ και
Στροφική κίνηση: $T'_{\sigma\tau}R=\dfrac{1}{2}MR^2\dfrac{\alpha_{cm}}{R}\Rightarrow T'_{\sigma\tau}=\dfrac{1}{2}M\alpha_{cm}$. Τότε από τις δυο σχέσεις προκύπτει $\alpha_{cm}=\dfrac{2g\eta\mu\varphi}{3}=\dfrac{10}{3}m/s^2$.

Όμως $\upsilon^2=2\cdot\alpha_{cm}\cdot(\dfrac{3L}{4}+|x|)\Rightarrow\upsilon^2=2\cdot\dfrac{10}{3}(1{,}2+0{,}15)\Rightarrow\upsilon^2=9\Rightarrow\upsilon=3m/s$.

Ακόμη η κίνηση του κυλίνδρου και μέχρι να ανατραπεί η ράβδος διαρκεί t=0,9s.