

## 70. Δίσκος και σφαίρα

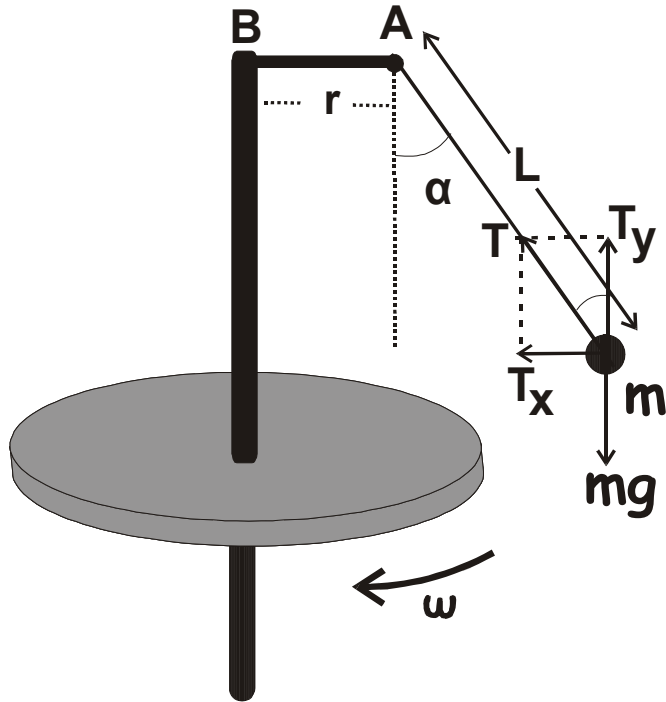
Η σημειακή μάζα  $m=1\text{Kg}$  είναι δεμένη μέσω αβαρούς νήματος από ένα σημείο A που απέχει από τον άξονα περιστροφής του δίσκου απόσταση  $(AB)=r=0,5\text{m}$  όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο δίσκος έχει μάζα  $M=2\text{Kg}$  και ακτίνα  $R'=0,8\text{m}$ . Ο δίσκος και η μάζα  $m$ , περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Το AB είναι αμελητέας μάζας.

α) Αν το μήκος του νήματος είναι  $L=\frac{7}{6}\text{m}$  και η

σηματιζόμενη γωνία  $\alpha$  έχει  $\eta\mu\alpha=0,6$ , τότε να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου.

β) Μια δεύτερη σημειακή μάζα  $m_1=m=1\text{Kg}$  αφήνεται να πέσει κατακόρυφα και κολλάει στο δίσκο σε απόσταση  $d$  από το κέντρο του οπότε η σηματιζόμενη γωνία  $\alpha$  γίνεται  $30^\circ$ . Να βρεθεί η απόσταση  $d$  και να υπολογιστεί η μεταβολή της στροφορμής της μάζας  $m$  κατά τη κρούση.

γ) Αν κάποια στιγμή μετά την κρούση κοπεί το νήμα που συνδέει τη μάζα  $m$  με το σύστημα, τότε να υπολογιστεί το έργο της δύναμης που απαιτείται για να ακινητοποιηθεί το σύστημα δίσκος – μάζα  $m_1$ .



Δίνεται για το δίσκο  $I_\delta = \frac{1}{2} M \cdot R'^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

### Συνοπτική λύση:

α)  $T_y = m \cdot g \Rightarrow T \cdot \sigma\upsilon\eta\alpha = m \cdot g$  (1) και  $T_x = F_K \Rightarrow T \cdot \eta\mu\alpha = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow T \cdot \eta\mu\alpha = m \cdot \omega^2 \cdot R$ , όπου η

ακτίνα  $R$  της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει η μάζα  $m$  είναι  $R=r+L \cdot \eta\mu\alpha$ , οπότε είναι  $T \cdot \eta\mu\alpha = m \cdot \omega^2 \cdot (r+L \cdot \eta\mu\alpha)$  (2).

Διαιρώντας κατά μέλη τις (2) και (1) έχουμε  $\epsilon\phi\alpha = \frac{\omega^2 (r+L \cdot \eta\mu\alpha)}{g} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \cdot \epsilon\phi\alpha}{r+L \cdot \eta\mu\alpha}}$ . Ισχύει  $\sigma\upsilon\eta\alpha=0,8$  και  $\epsilon\phi\alpha=0,75$  άρα έχουμε

$$\omega = \sqrt{\frac{10 \cdot 0,75}{0,5 + \frac{7}{6} \cdot 0,6}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{75}{12}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow \omega = 2,5 \text{ rad/s.}$$

β) Η ακτίνα  $R_1$  της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει η μάζα  $m$  μετά την κρούση είναι:

$$R_1 = r + L \cdot \eta\mu\alpha = \frac{13}{12} m, \text{ οπότε είναι}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{g \cdot \epsilon\phi\alpha}{r + L \cdot \eta\mu\alpha}} \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{\frac{3}{12}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega' = 2,3 \text{ rad/s.}$$

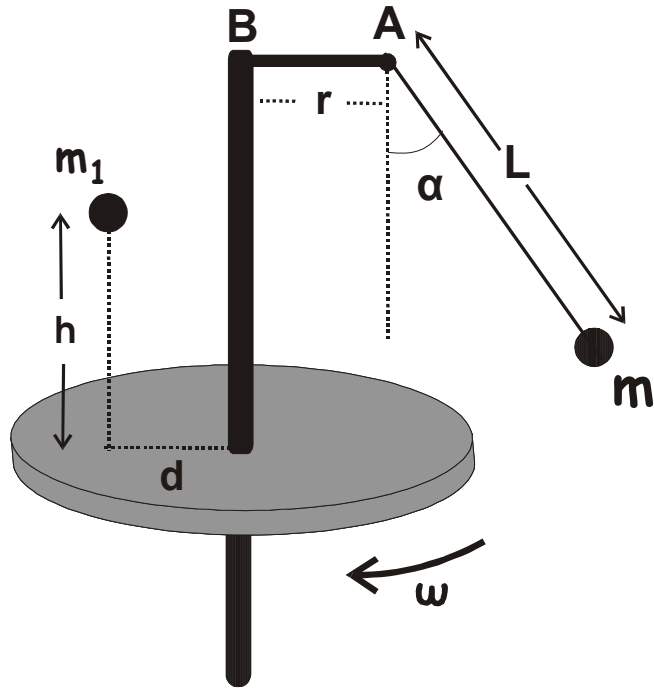
Για την αρχική στροφορμή του συστήματος έχουμε:

$$L_{\text{αρχ}} = (I_\delta + mR^2) \cdot \omega \text{ με } I_\delta = \frac{1}{2} M \cdot R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_\delta = 0,64 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2, \text{ οπότε είναι}$$

$$L_{\text{αρχ}} = (0,64 + 1,2^2) \cdot 2,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_{\text{αρχ}} = 5,2 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$



Η τελική στροφορμή του συστήματος είναι:

$$L_{\text{τελ}} = (I_\delta + m_1 d^2 + mR_1^2) \cdot \omega' \Rightarrow L_{\text{τελ}} = [0,64 + d^2 + \left(\frac{13}{12}\right)^2] \cdot 2,3$$

$$\text{Από την Α.Δ.Σ έχουμε } L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \Rightarrow 5,2 = [0,64 + d^2 + \left(\frac{13}{12}\right)^2] \cdot 2,3 \Rightarrow d = 0,67 \text{ m.}$$

Για την αρχική στροφορμή της μάζας  $m$  έχουμε  $L_{\text{αρχ}(m)} = mR^2 \cdot \omega \Rightarrow L_{\text{αρχ}(m)} = 1,2^2 \cdot 2,5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow L_{\text{αρχ}(m)} = 3,6 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.} \text{ Για την τελική της στροφορμή είναι,}$$

$$L_{\text{τελ}(m)} = mR^2 \cdot \omega' \Rightarrow L_{\text{τελ}(m)} = \left(\frac{13}{12}\right)^2 \cdot 2,3 \Rightarrow L_{\text{τελ}(m)} = 2,7 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

$$\text{Τελικά } \Delta L_{(m)} = L_{\text{τελ}(m)} - L_{\text{αρχ}(m)} \Rightarrow \Delta L_{(m)} = -0,9 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s.}$$

$$\gamma) \text{ Αφού κοπεί το νήμα είναι } K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} (I_\delta + m_1 \cdot d^2) \cdot \omega'^2 = \frac{1}{2} \cdot (0,64 + 0,67^2) \cdot 2,3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} \cdot (0,64 + 0,67^2) \cdot 2,3^2 \Rightarrow K_{\text{αρχ}} = 2,88 \text{ J.} \text{ Τότε}$$

$$\Theta.Μ.Κ.Ε \Rightarrow -K_{\text{αρχ}} = W_F \Rightarrow W_F = -2,88 \text{ J.}$$