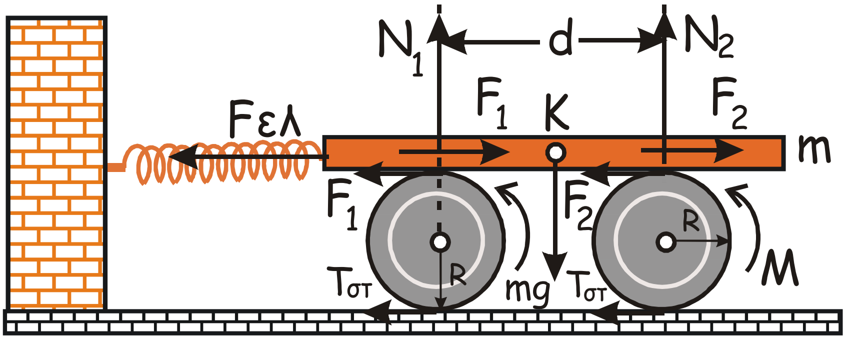
71. Ράβδος- κύλινδροι - ταλάντωση

Ράβδος μάζας m=4Kg είναι δεμένη στο ένα άκρο της σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς K=70N/m, όπως φαίνεται στο σχήμα και ισορροπεί με το ελατήριο αρχικά να βρίσκεται στη θέση φυσικού του μήκους. Η ράβδος ακουμπά επίσης πάνω στους δυο κυλίνδρους της ίδιας μάζας M=0,5 Kg, και ακτίνας R. Ακόμη το μέσο K της ράβδου, βρίσκεται ακριβώς στο μέσο της απόστασης d των κέντρων των δυο κυλίνδρων. Τότε:

α) Να δείξετε πως μεταβάλλονται οι κάθετες δυνάμεις στήριξης N_1 και N_2 από τους κυλίνδρους στη ράβδο σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x, από την αρχική θέση ισορροπίας.



β) Να δείξετε πως αν απομακρύνουμε τη ράβδο από τη θέση ισορροπίας της και την αφήσουμε ελεύθερη τότε αυτή πραγματοποιεί α.α.τ.

γ) Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης που πραγματοποιεί η ράβδος, καθώς και οι δυο κύλινδροι.

δ) Αν η μέγιστη απομάκρυνση της ράβδου από τη θέση ισορροπίας της είναι A=10cm τότε να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια για την ταλάντωση της ράβδου και του κάθε κυλίνδρου.

ε) Αν d=1m, τότε να υπολογίσετε τις κάθετες δυνάμεις στήριξης N_1 και N_2 από τους κυλίνδρους στη ράβδο, όταν αυτή βρίσκεται στη μέγιστη θετική της απομάκρυνση x=+A.

Θεωρούμε ότι η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, ότι δεν παρατηρείται ολίσθηση μεταξύ ράβδου και τροχαλιών και ότι η ροπή αδράνειας του κάθε κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδο της βάσης του είναι: $I_{cm}=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2$.

Συνοπτική λύση:

α) Για τη θέση ισορροπίας της ράβδου αρχικά είναι $F_{ελ}=0$ και $F_1=F_2=0$. Τότε έχουμε: $\Sigma F_y=0 \Rightarrow N_1+N_2= mg \Rightarrow N_1+N_2= 40 \Rightarrow N_2=40-N_1$.

Ακόμη αν μετατοπίσουμε τη ράβδο έστω προς τα δεξιά κατά x έχουμε $\Sigma\tau_{(κ)}=0 \Rightarrow$

$$N_1\cdot\left(\frac{d}{2}+x\right)= N_2\cdot\left(\frac{d}{2}-x\right) \Rightarrow N_1\cdot\left(\frac{d}{2}+x\right)= (40-N_1)\cdot\left(\frac{d}{2}-x\right) \Rightarrow N_1\cdot d=20\cdot d-40\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1=20\cdot\left(1-2\cdot\frac{x}{d}\right) \text{ και } N_2=40-20+40\frac{x}{d} \Rightarrow N_2=20\left(1+2\frac{x}{d}\right).$$

β) Η ράβδος ασκεί στον κάθε κύλινδρο μια οριζόντια δύναμη στατικής τριβής F_1 και F_2 με $F_1=F_2$ με φορά προς τα αριστερά. Βέβαια τότε και στη ράβδο ασκούνται δυο ίσες και αντίθετες δυνάμεις F_1 και F_2. Ακόμη στον κάθε κύλινδρο ασκείται οριζόντια και η στατική τριβή $T_{στ}$, από το πάτωμα.

➤ Για τον κάθε κύλινδρο και για τη μεταφορική του κίνηση θα έχουμε:
$\Sigma F = M\alpha_{cm} \Rightarrow F_1 + T_{\sigma\tau} = M\alpha_{cm}$ (1) όπου α_{cm} είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κάθε κυλίνδρου.

Ενώ για τη στροφική του κίνηση θα έχουμε:

$\Sigma\tau = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow (F_1 - T_{\sigma\tau})R = \frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow F_1 - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M\alpha_{cm}$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $2F_1 = \frac{3}{2}M\alpha_{cm} \Rightarrow F_1 = \frac{3}{8}\cdot\alpha_{cm}$ (3).

Τότε (1) $\Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{1}{8}\cdot\alpha_{cm}$ (4).

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει $T_{\sigma\tau} = \frac{F_1}{3}\cdot$ (5).

➤ Για τη μεταφορική κίνηση της ράβδου έχουμε $\Sigma F = m\alpha$ όπου α είναι η επιτάχυνση της ράβδου. Τότε:
$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - F_1 - F_2 = m\alpha$ $(\alpha = 2\cdot\alpha_{cm})$ άρα έχουμε $F_{\varepsilon\lambda} - F_1 - F_2 = 2m\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow$
$\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - 2F_1 = 2m\cdot\alpha_{cm}$ και επειδή είναι $F_1 = \frac{3}{8}\cdot\alpha_{cm}$ και m=4Kg είναι
$F_{\varepsilon\lambda} - \frac{3}{4}\cdot\alpha_{cm} = 8\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = \frac{35}{4}\cdot\alpha_{cm}$ (6).

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (6) προκύπτει $F_1 = \frac{3}{70}\cdot F_{\varepsilon\lambda}$ (7).

Σε μα τυχαία θέση της ράβδου έχουμε: (εδώ τραβήξαμε το ελατήριο προς τα δεξιά κατά +x):
$\Sigma F = 2F_1 - F_{\varepsilon\lambda} = \frac{3}{35}\cdot F_{\varepsilon\lambda} - F_{\varepsilon\lambda} = -\frac{32}{35}\cdot F_{\varepsilon\lambda} = -\frac{32}{35}\cdot K\cdot x = -64\cdot x$. Άρα έχουμε α.α.τ με σταθερά **D=64N/m**.

γ) Για τη ράβδο έχουμε $D = m\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ = **4 rad/s.**

Για τον καθένα κύλινδρο σε μια τυχαία θέση και για τη μεταφορική του κίνηση έχουμε:
$\Sigma F = -(F_1 + T_{\sigma\tau}) = -(F_1 + \frac{F_1}{3}) = -\frac{4}{3}\cdot F_1 = -\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{70}\cdot F_{\varepsilon\lambda} = -\frac{4}{70}\cdot K\cdot x = -4\cdot x$. Όμως αν x είναι η μετατόπιση της ράβδου τότε ισχύει $x = 2\cdot x_{cm}$ όπου x_{cm} είναι η μετατόπιση του κέντρου μάζας του κάθε κυλίνδρου. Τελικά είναι $\Sigma F = -4\cdot x \Rightarrow \Sigma F = -8\cdot x_{cm}$. Άρα προκύπτει ότι ο κάθε κύλινδρος πραγματοποιεί μια **α.α.τ** με σταθερά **D_1= 8N/m**. Τότε έχουμε $D_1 = M\cdot\omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{D_1}{M}}$ = **4 rad/s.**

Ακόμη για τον καθένα κύλινδρο σε μια τυχαία θέση και για τη στροφική του κίνηση έχουμε: $\Sigma\tau = -(F_1 - T_{\sigma\tau})\cdot R = -(F_1 - \frac{F_1}{3})\cdot R = -\frac{2}{3}\cdot F_1\cdot R = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{70}\cdot F_{\varepsilon\lambda}\cdot R = -\frac{2}{70}\cdot K\cdot x\cdot R = -2\cdot x\cdot R$.
Όμως ισχύει $x = 2\cdot x_{cm}$ άρα έχουμε $\Sigma\tau = -4\cdot R\cdot x_{cm}$. Ακόμη $x_{cm} = R\cdot\theta$ οπότε προκύπτει $\Sigma\tau = -4\cdot R^2\cdot\theta$. Άρα ο κάθε ένας κύλινδρος πραγματοποιεί και μια **στροφική ταλάντωση** με **$D_2 = 4\cdot R^2$**.

Τότε έχουμε $D_2=I\cdot\omega_2^2 \Rightarrow \omega_2= \sqrt{\frac{D_2}{I}} = \sqrt{\frac{4\cdot R^2}{0,5\cdot M\cdot R^2}} = \sqrt{16} =$ **4 rad/s**.

δ) Για πλάτος ταλάντωσης A=10cm και για τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου έχουμε : $U_{ελ}=\frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2 \Rightarrow U_{ελ}=\frac{1}{2}\cdot 70\cdot 0,01= 0,35$ J.

Για τη μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης της ράβδου έχουμε

$U=\frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2 \Rightarrow U_{ελ}=\frac{1}{2}\cdot 64\cdot 0,01= 0,32$ J.

Για την α.α.τ του κάθε κυλίνδρου έχουμε $U_1=\frac{1}{2}\cdot D_1\cdot A_1^2$ όπου $A_1=\frac{A}{2}=0,05$m. Δηλαδή το πλάτος ταλάντωσης A_1 του κάθε κυλίνδρου είναι το μισό του πλάτους ταλάντωσης της ράβδου. Έτσι για την ενέργεια της α.α.τ είναι $U_1=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 25\cdot 10^{-4}=10^{-2}$ J.

Για τη στροφική αρμονική ταλάντωση του κάθε κυλίνδρου έχουμε

$U_2=\frac{1}{2}\cdot D_2\cdot \theta_0^2$ όπου $\theta_0=\frac{A_1}{R}$. Τότε $U_2=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot R^2\cdot \frac{A_1^2}{R^2} \Rightarrow U_2=2\cdot A_1^2 \Rightarrow U_2=2\cdot 25\cdot 10^{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow U_2=0,5\cdot 10^{-2}$ J.

Άρα η συνολική δυναμική ενέργεια του κάθε κυλίνδρου είναι $U_{ολ}= U_1+ U_2=0,015$ J.

Πραγματικά ισχύει ότι $U+2\cdot U_{ολ}=0,32+0,03=0,35\text{ J}=U_{ελ}$.

Ακόμη για την ολική κινητική ενέργεια του κάθε κυλίνδρου στη θέση ισορροπίας είναι $K_{ολ}=\frac{1}{2}\cdot M\cdot \upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2=\frac{1}{2}\cdot M\cdot \upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2\cdot\omega^2=\frac{1}{2}\cdot M\cdot \upsilon_{cm}^2+\frac{1}{4}\cdot M\cdot \upsilon_{cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow K_{ολ}=\frac{3}{4}\cdot M\cdot \upsilon_{cm}^2$ όπου $\upsilon_{cm}=\omega\cdot A_1$ είναι η μέγιστη ταχύτητα στη θέση ισορροπίας. Δηλαδή $\upsilon_{cm}=\omega\cdot A_1=4\cdot 0,05=0,2$ m/s.

Τελικά έχουμε $K_{ολ}=\frac{3}{4}\cdot M\cdot \upsilon_{cm}^2 \Rightarrow K_{ολ}=\frac{3}{4}\cdot 0,5\cdot 0,04=0,015\text{ J}= U_{ολ}$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι $K_{μετ}=\frac{1}{2}\cdot M\cdot \upsilon_{cm}^2=10^{-2}\text{ J}= U_1$. Δηλαδή η U_1 εκφράζει τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης που έγινε κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης και ακόμη

$K_{στρ}=\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2\cdot\omega^2=\frac{1}{4}\cdot M\cdot \upsilon_{cm}^2=0,5\cdot 10^{-2}\text{J}= U_2$. Δηλαδή η U_2 εκφράζει τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης που έγινε κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης.

ε) Για x= +A=0,1m και d=1m έχουμε $N_1=20\cdot(1-2\cdot\frac{x}{d})=16$N και $N_2=20(1+2\frac{x}{d})=24$ N.

mix-mix@sch.gr