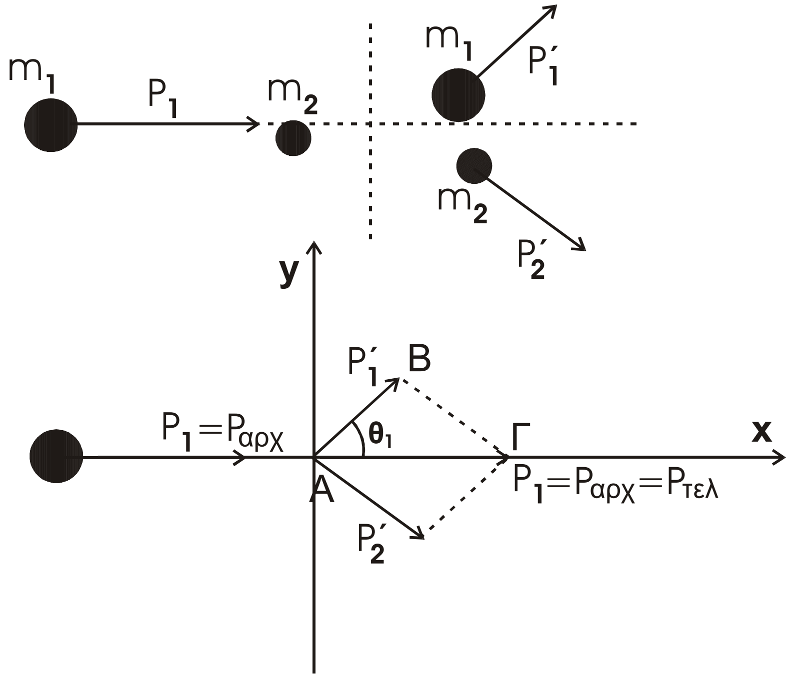
72. Μη μετωπική ελαστική κρούση m_1 και m_2

Μια σφαίρα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα $υ=1m/s$ και συγκρούεται μη μετωπικά και ελαστικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 με $m_1=2m_2$.
Τότε:
α) να υπολογίσετε τη μέγιστη γωνία εκτροπής της m_1 και
β) για τη γωνία εκτροπής που υπολογίσατε να βρείτε τις ταχύτητες $υ_1$ και $υ_2$ των δυο μαζών m_1 και m_2 αντίστοιχα, μετά την κρούση.



Συνοπτική λύση:

α) Η κρούση είναι ελαστική οπότε ισχύει $K_{αρχ}=K_{τελ}\Rightarrow \frac{1}{2}m_1\cdot υ^2=\frac{1}{2}m_1\cdot υ_1^2+\frac{1}{2}m_2\cdot υ_2^2\Rightarrow$

$\Rightarrow υ_2^2=(υ^2-υ_1^2)\,\frac{m_1}{m_2}$ (1) .

Ακόμη από το νόμο των συνημίτονων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε
$P_2'^2=P_1'^2+P_{αρχ}^2-2P_1'\cdot P_{αρχ}\cdot συνθ_1\Rightarrow (m_2υ_2)^2=(m_1υ_1)^2+(m_1υ)^2-2m_1^2υ_1υσυνθ_1\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{m_2^2}{m_1^2}υ_2^2=υ_1^2+υ^2-2υ_1υσυνθ_1$. Τότε από τη σχέση (1) προκύπτει

$\frac{m_2^2}{m_1^2}(υ^2-υ_1^2)\cdot\frac{m_1}{m_2}=υ_1^2+υ^2-2υ_1υσυνθ_1\Rightarrow υ_1^2(1+\frac{m_2}{m_1})+(1-\frac{m_2}{m_1})υ^2-2υ_1υσυνθ_1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow(1+\frac{m_2}{m_1})\,υ_1^2-2υσυνθ_1\cdot υ_1+(1-\frac{m_2}{m_1})υ^2=0$ (2)

$Δ\geq0\Rightarrow4υ^2\cdot συν^2θ_1-4(1+\frac{m_2}{m_1})\cdot(1-\frac{m_2}{m_1})\,υ^2\geq0\Rightarrow\ συν^2θ_1-(1-\frac{m_2^2}{m_1^2})\geq0\Rightarrow$

$\Rightarrow συν^2θ_1\geq1-\frac{m_2^2}{m_1^2}$

Για $m_1=2m_2$ είναι $συν^2θ_1 \geq 1-\frac{1}{4} \Rightarrow συν^2θ_1 \geq \frac{3}{4} \Rightarrow συνθ_1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα η μέγιστη γωνία εκτροπής είναι αυτή για την οποία $συνθ_1=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow θ_1=30^0$.

Γενικά για κάθε $\mathbf{m_1>m_2}$ η εξίσωση $συν^2θ_1 \geq 1-\frac{m_2^2}{m_1^2}$ δίνει **μια και μοναδική μέγιστη γωνία εκτροπής** εξαρτώμενη από τις μάζες m_1 και m_2 η οποία θα παίρνει τιμές από $(0\text{ -}90^0)$.

β) Τότε (2) και για υ=1 και $θ_1=30^0 \Rightarrow \frac{3}{2}υ_1^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}υ_1+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 3υ_1^2-2\sqrt{3}\cdot υ_1+1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow υ_1=0{,}58$ m/s. Ακόμη είναι και (1)$\Rightarrow υ_2^2=2(1-\frac{1}{3}) \Rightarrow υ_2=\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow υ_2=1{,}16$ m/s.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν είναι $m_2=2m_1$ τότε είναι και $συν^2θ_1 \geq -3$ που ισχύει για κάθε γωνία $θ_1$, άρα η μέγιστη γωνία εκτροπής $θ_1$ **μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από $(0\text{ - }180^0)$.**
Γενικά για κάθε $\mathbf{m_2>m_1}$ η $θ_1$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

Τότε (2) και για υ=1m/s και έστω $\mathbf{θ_1=180^0} \Rightarrow 3υ_1^2+2\cdot υ_1-1=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow υ_1=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{6} \Rightarrow υ_1=\frac{1}{3}$ m/s (με αντίθετη φορά αφού $θ_1=180^0$) και (1)$\Rightarrow υ_2^2=\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{9}) \Rightarrow υ_2^2=\frac{4}{9} \Rightarrow υ_2=\frac{2}{3}$ m/s. Στην πραγματικότητα εδώ έχουμε την περίπτωση της κεντρικής ελαστικής κρούσης και ισχύουν οι σχέσεις $υ_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ=-\frac{υ}{3}=-\frac{1}{3}$ m/s και $υ_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}υ=\frac{2υ}{3}=\frac{2}{3}$ m/s.

Αν $\mathbf{θ_1=0^0} \Rightarrow 3υ_1^2-2\cdot υ_1-1=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow υ_1=\frac{2\pm\sqrt{16}}{6} \Rightarrow υ_1=1$ m/s (με την ίδια φορά αφού $θ_1=0^0$) και
(1)$\Rightarrow υ_2^2=\frac{1}{2}\cdot(1-1) \Rightarrow υ_2=0$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ισχυριστούμε ότι δεν υπήρξε κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ των μαζών, αφού δε μεταβλήθηκε η ορμή καμίας από αυτές και άρα δεν ασκήθηκε καμία δύναμη.

mix-mix@sch.gr