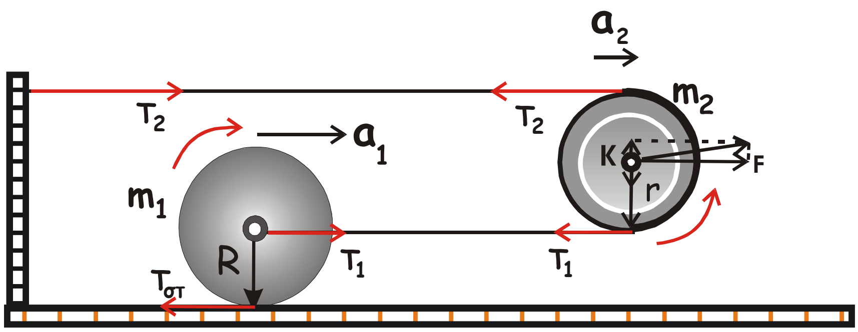
73. Κινητή τροχαλία και σφαίρα

Στη διπλανή διάταξη η σφαίρα έχει μάζα m_1 =5Kg και ακτίνα R ενώ η τροχαλία κέντρου Κ έχει ακτίνα r και μάζα m_2=2Kg.

Τραβάμε την τροχαλία προς τα δεξιά ασκώντας κατάλληλη δύναμη η οποία έχει οριζόντια συνιστώσα F=124N όπως φαίνεται στο σχήμα.



Να βρείτε:

α) Την επιτάχυνση της σφαίρας και της τροχαλίας καθώς και τις τάσεις των νημάτων.

β) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F καθώς και τα έργα των τάσεων του νήματος για μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης F κατά x=0,2m και

γ) να υπολογιστούν τότε οι κινητικές ενέργειες των δυο μαζών.

Για τη σφαίρα ισχύει $I_{cm}=I_1=\frac{2}{5}m_1\cdot R^2$ και για την τροχαλία: $I_{cm}=I_2=\frac{1}{2}m_2\cdot r^2$. Ακόμη τα νήματα είναι αβαρή και $g=10m/s^2$.

Συνοπτική λύση:

Η δύναμη που ασκούμε στην τροχαλία έχει οριζόντια συνιστώσα F=124N και κατακόρυφη ίση με $f=m_2\cdot g=20N$, ώστε η τροχαλία να ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα. Έτσι η συνολική δύναμη που ασκούμε σχηματίζει με την οριζόντια συνιστώσα γωνία θ που έχει εφθ$=\frac{20}{124}=\frac{5}{31}$ ή $θ=9^0$και μέτρο 125,6N.

α) m_1: $ΣF=m_1α_1 \Rightarrow T_1- T_{στ}= m_1α_1$ (1)

$T_{στ}\cdot R=\frac{2}{5}m_1\cdot R^2\,\frac{α_1}{R} \Rightarrow T_{στ}=\frac{2}{5}m_1\cdot α_1$ (2)

(1) ∧ (2) $\Rightarrow T_1=\frac{7}{5}\cdot m_1\cdot α_1$ (3)

m_2 : $ΣF=m_2α_2 \Rightarrow F-T_1- T_2= m_2α_2$ όπου $α_2=α_{γων2}\cdot r$ και $α_1= α_2+α_{γων2}\cdot r = 2α_2$. Άρα $F-T_1- T_2= m_2\frac{α_1}{2}$ (4).

$(T_2-T_1)\cdot r=\frac{1}{2}\cdot m_2r^2\cdot\frac{α_2}{r} \Rightarrow T_2-T_1=\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot α_2 \Rightarrow T_2-T_1=\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\frac{α_1}{2} \Rightarrow T_2-T_1=\frac{1}{4}\cdot m_2\cdot α_1$ (5)

(4) ∧ (5) $\Rightarrow F-2T_1=\frac{3}{4}\cdot m_2\cdot α_1$ (6). Τότε $\overset{(3)}{\Rightarrow} 2T_1=\frac{14}{5}\cdot m_1\cdot α_1$ (7) οπότε (6) ∧ (7) $\Rightarrow$

$F = \frac{3}{4}\cdot m_2\cdot\alpha_1 + \frac{14}{5}\cdot m_1\cdot\alpha_1 \Rightarrow F= \frac{3}{4}\cdot 2\cdot\alpha_1+\frac{14}{5}\cdot 5\cdot\alpha_1 \Rightarrow F= \frac{31}{2}\cdot\alpha_1\Rightarrow \alpha_1=\frac{2F}{31}\Rightarrow \boldsymbol{\alpha_1=8m/s^2}$.

Επίσης προκύπτει και $\alpha_1= 2\alpha_2\Rightarrow \alpha_2=\frac{\alpha_1}{2}\Rightarrow \boldsymbol{\alpha_2=4m/s^2}$. $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $T_1=\frac{7}{5}\cdot m_1\cdot\alpha_1\Rightarrow T_1=\frac{7}{5}\cdot 5\cdot 8\Rightarrow$

$\Rightarrow\boldsymbol{T_1=56N}$ και $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $T_2=F-T_1- m_2\frac{\alpha_1}{2}\Rightarrow \boldsymbol{T_2=60N}$.

β) $W_F=F\cdot x\Rightarrow W_F=124\cdot 0{,}2\Rightarrow \boldsymbol{W_F=24{,}8\ J}$.
Ακόμη για τη σφαίρα είναι $W_{T1}=T_1\cdot x_1$. Όμως $x_1=2x\Rightarrow x_1=0{,}4m$, άρα $W_{T1}=56\cdot 0{,}4\Rightarrow$ $\Rightarrow W_{T1}=22{,}4$ J. Για τη στατική τριβή και για τη στροφική κίνηση είναι $W_{T\sigma\tau}=T_{\sigma\tau}\cdot R\cdot\theta_1= W_{T\sigma\tau}=T_{\sigma\tau}\cdot x_1$ και για τη μεταφορική κίνηση είναι $W_{T\sigma\tau}= - T_{\sigma\tau}\cdot x_1$ άρα το συνολικό έργο της στατικής τριβής είναι $W_{T\sigma\tau}= T_{\sigma\tau}\cdot x_1-T_{\sigma\tau}\cdot x_1=0$. Οπότε το συνολικό έργο των δυνάμεων στη σφαίρα είναι $W_1=22{,}4$ J.

Για την τροχαλία και για τη μεταφορική κίνηση το έργο της T_1 είναι $W_{T1}= -T_1\cdot x$ και για τη στροφική κίνηση είναι $W_{T1}= -T_1\cdot r\cdot\theta= W_{T\sigma\tau}= -T_1\cdot x$ (ισχύει $x=r\cdot\theta$). Άρα το συνολικό έργο της T_1 είναι $W_{T1}= -2T_1\cdot x = -2\cdot 56\cdot 0{,}2= -22{,}4$ J. Ακόμη για το έργο της τάσης T_2 είναι $W_{T2}= -T_2\cdot x$ και για τη στροφική κίνηση είναι $W_{T2}= T_2\cdot r\cdot\theta= W_{T\sigma\tau}= T_2\cdot x$
Άρα το συνολικό έργο της T_2 είναι $W_{T2}= T_2\cdot x - T_2\cdot x -= 0$. Ενώ ισχύει
$W_F=F\cdot x\Rightarrow W_F=124\cdot 0{,}2\Rightarrow W_F=24{,}8$ J.

Οπότε το συνολικό έργο των δυνάμεων στην τροχαλία είναι $W_2= 24{,}8-22{,}4=2{,}4J$.
Παρατηρείστε ότι το συνολικό έργο των τάσεων T_1 και T_2 είναι μηδέν σαν εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος σφαίρα – τροχαλία. Οπότε το συνολικό έργο στο σύστημα των δυο σωμάτων είναι όσο και το έργο της εξωτερικής δύναμης F δηλαδή είναι ίσο με $W_F=24{,}8$ J.

γ) Για μετατόπιση του κέντρου μάζας της τροχαλίας Κ κατά $x=0{,}2m$ είναι $\upsilon_2^2=2\cdot\alpha_2\cdot x\Rightarrow\upsilon_2^2=1{,}6\ (m/s)^2$. Ακόμη για τη σφαίρα είναι $\upsilon_1=2\upsilon_2$ και $\upsilon_1^2=4\upsilon_2^2=6{,}4\ (m/s)^2$. Τότε η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι

$K_1= \frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_1^2+ \frac{1}{2}\cdot I_1\cdot\omega_1^2\Rightarrow K_2= \frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_1^2+ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}m_1\cdot\upsilon_1^2 \Rightarrow K_1= \frac{7}{10}\cdot m_1\cdot\upsilon_1^2\Rightarrow$

$\Rightarrow K_1= \frac{7}{10}\cdot 5\cdot 6{,}4\Rightarrow \boldsymbol{K_1=22{,}4J=W_1}$.

Ακόμη η κινητική ενέργεια της τροχαλίας είναι

$K_2= \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\upsilon_2^2+ \frac{1}{2}\cdot I_2\cdot\omega_2^2\Rightarrow K_2= \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\upsilon_2^2+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\upsilon_2^2\Rightarrow K_2= \frac{3}{4}\cdot m_2\cdot\upsilon_2^2\Rightarrow$

$\Rightarrow K_2= \frac{3}{4}\cdot 2\cdot 1{,}6\Rightarrow \boldsymbol{K_2=2{,}4J=W_2}$.

Άρα η συνολική κινητική ενέργεια των δυο σωμάτων είναι όσο και το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων δηλαδή ισχύει $\boldsymbol{K_1+K_2=W_F}$.