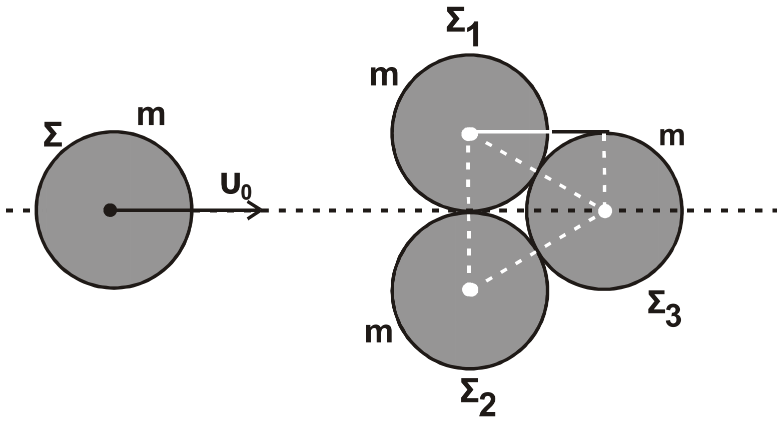
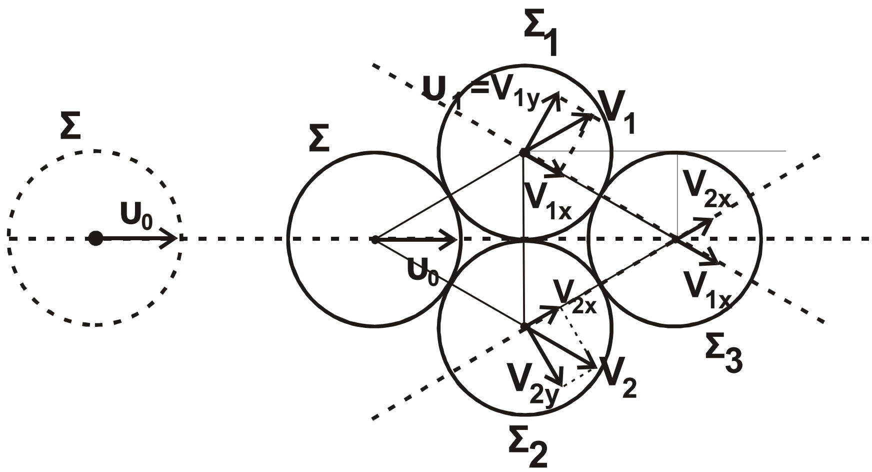
76. Κρούση 4 σφαιρών



Διαθέτουμε τέσσερις όμοιες λείες σφαίρες Σ, $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$ μάζας m η καθεμία που βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο.
Οι σφαίρες $Σ_1$, $Σ_2$ και $Σ_3$ εφάπτονται αρχικά όπως φαίνεται στο σχήμα.
Η σφαίρα Σ κινείται αρχικά με οριζόντια ταχύτητα $υ_0$=7m/s η οποία κατευθύνεται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο επαφής των $Σ_1$ και $Σ_2$ και το κέντρο της $Σ_3$.
Όλες οι κρούσεις θεωρούνται ελαστικές.
Να υπολογιστούν οι ταχύτητες όλων των σφαιρών μετά την κρούση.

Συνοπτική λύση:



Μόλις συγκρουστεί η σφαίρα Σ με τη $Σ_1$ τότε αυτή αποκτά ταχύτητα V_1 που βρίσκεται πάνω στη διάκεντρο των δυο σφαιρών, σύμφωνα με τον $3^{ο}$ Νόμο του Newton. Παρόμοια και η $Σ_2$ αποκτά ταχύτητα V_2. Η V_1 όπως και η V_2 σχηματίζουν με τον οριζόντιο άξονα γωνία 30^0. Όμως στη συνέχεια η $Σ_1$ συγκρούεται με τη $Σ_3$. Η συνιστώσα V_{1x} της ταχύτητας V_1 είναι $V_{1x} = V_1 \cdot συν60^0$ ενώ η συνιστώσα V_{1y} είναι $V_{1y} = V_1 \cdot ημ60^0$. Επειδή η V_{1x} βρίσκεται πάνω στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα των $Σ_1$ και $Σ_3$ για αυτό σε αυτόν τον άξονα έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων. Δηλαδή η $Σ_3$ εξαιτίας της κρούσης με τη $Σ_1$ θα κινηθεί με ταχύτητα V_{1x}. Τότε η $Σ_1$ μετά την κρούση της με τη $Σ_3$ θα κινηθεί με ταχύτητα V_{1y} κάθετη στην V_{1x}. Άρα η τελική ταχύτητα $υ_1$ της $Σ_1$ θα είναι

$υ_1 = V_{1y} = V_1 \cdot ημ60^0 = V_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Παρόμοια η τελική ταχύτητα $υ_2$ της $Σ_2$ θα είναι

$υ_2 = V_{2y} = V_2 \cdot ημ60^0 = V_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ακόμη η τελική ταχύτητα $υ_3$ της $Σ_3$ θα είναι οριζόντια και για το μέτρο της θα έχουμε $υ_3 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{2x}^2 + 2V_{1x}V_{1y}συν60^0}$. Όμως από την Α.Δ.Ο($_y$) στον άξονα yy΄ έχουμε $0 = m \cdot V_{1y} \cdot ημ60^0 - m \cdot V_{2y} \cdot ημ60^0 \Rightarrow V_{1y} = V_{2y} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $V_1 \cdot ημ60^0 = V_2 \cdot ημ60^0 \Rightarrow V_1 = V_2$ άρα και $V_{1x} = V_{2x}$. Τότε από την προηγούμενη σχέση προκύπτει $υ_3 = V_{1x} \cdot \sqrt{3} = V_1 \cdot συν60^0 . \sqrt{3} \Rightarrow υ_3 = V_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα ισχύει $υ_1 = υ_2 = υ_3$.

Από την Α.Δ.Ο($_x$) στον άξονα xx΄ έχουμε
$m \cdot υ_0 = m \cdot υ_1 \cdot συν60^0 + m \cdot υ_2 \cdot συν60^0 + m \cdot υ_3 + m \cdot V$, όπου V είναι η τελική ταχύτητα της Σ μετά την κρούση της με τις $Σ_1$ και $Σ_2$.
Έτσι έχουμε $υ_0 = υ_1 + υ_3 + V \Rightarrow υ_0 = 2 \cdot υ_1 + V \Rightarrow V = υ_0 - 2 \cdot υ_1$ (1).
Ακόμη ισχύει $K_{αρχ} = K_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot υ_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot υ_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot υ_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot υ_3^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow υ_0^2 = 3 \cdot υ_1^2 + V^2$ (2), τότε από τη (1) προκύπτει
$υ_0^2 = 3 \cdot υ_1^2 + υ_0^2 + 4υ_1^2 - 4υ_0 \cdot υ_1 \Rightarrow 7υ_1 = 4υ_0 \Rightarrow υ_1 = \frac{4}{7} \cdot υ_0 \Rightarrow υ_1 = 4 m/s = υ_2 = υ_3$.
Τελικά (1)$\Rightarrow V = υ_0 - 2 \cdot υ_1 \Rightarrow V = 7 - 8 \Rightarrow V = -1$ m/s.