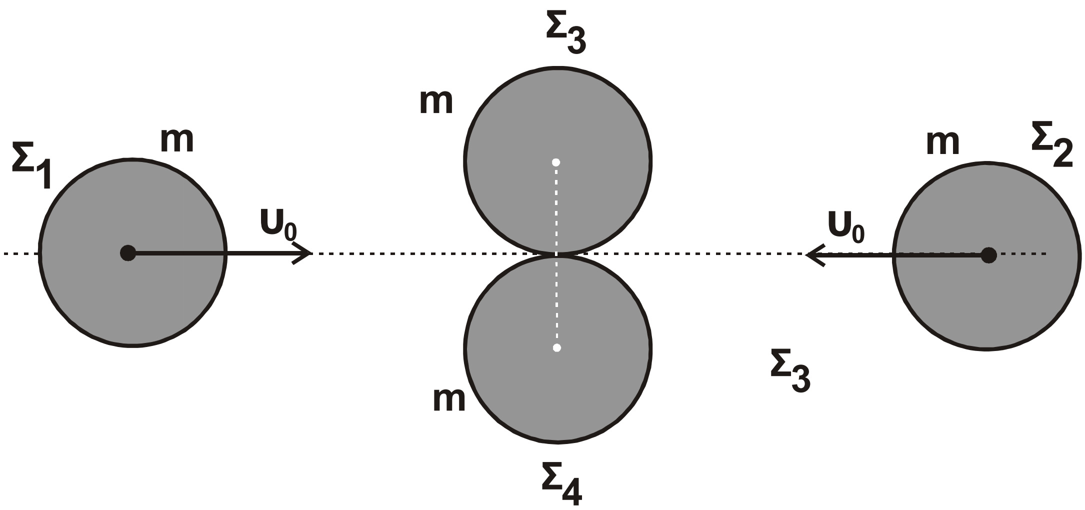
77. Κρούση 4 σφαιρών_2

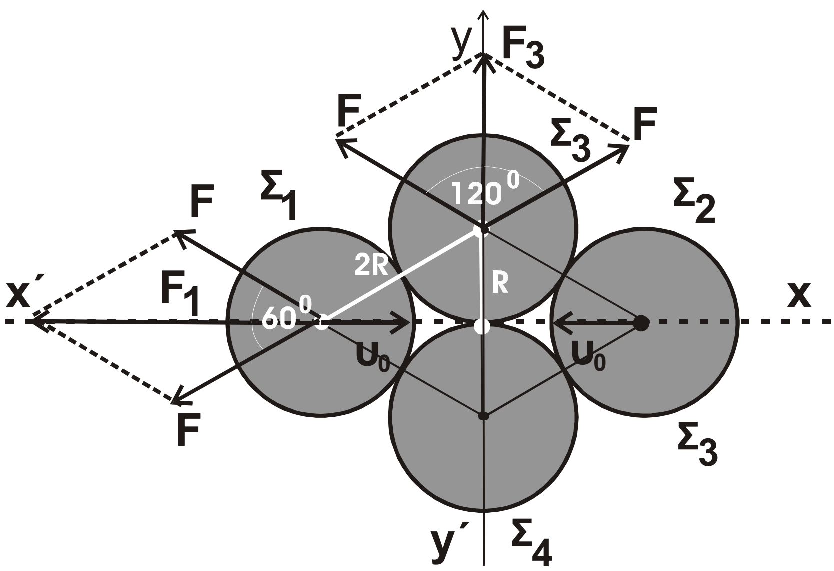
Διαθέτουμε τέσσερις όμοιες λείες σφαίρες $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$, $Σ_4$, μάζας m η καθεμία που βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο.



Οι σφαίρες $Σ_3$ και $Σ_4$ εφάπτονται αρχικά όπως φαίνεται στο σχήμα.
Οι σφαίρες $Σ_1$και $Σ_2$ ισαπέχουν από τη διάκεντρο των $Σ_3$ και $Σ_4$ και κινούνται με την ίδια οριζόντια ταχύτητα $υ_0$=1m/s. Οι ταχύτητές τους κατευθύνονται πάνω στην οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο επαφής των $Σ_3$ και $Σ_4$ και συγκρούονται ταυτόχρονα με αυτές. Όλες οι κρούσεις θεωρούνται ελαστικές.
Να υπολογιστούν οι ταχύτητες όλων των σφαιρών μετά την κρούση.

Συνοπτική λύση:

Οι $Σ_1$ και $Σ_2$ θα δεχτούν κατά τη διάρκεια της κρούσης μια συνολική δύναμη F_1 και F_2 αντίστοιχα στον άξονα xx΄. Για τη δύναμη F_1 ισχύει, $F_1=\frac{Δp_1}{Δt}=\frac{m(V-υ_0)}{Δt}$, όπου V είναι το μέτρο της ταχύτητας του $Σ_1$ μετά την κρούση . Παρόμοια ισχύουν και για το $Σ_2$.
Άρα η μεταβολή της ορμής των $Σ_1$ και $Σ_2$ θα είναι και αυτή στον άξονα xx΄. Επειδή όμως τα δυο σώματα έχουν αρχική ορμή στον άξονα xx΄ αυτό σημαίνει ότι και τελικά θα κινηθούν οριζόντια.
Οι $Σ_3$ και $Σ_4$ θα δεχτούν μια συνολική δύναμη F_3 και F_4 αντίστοιχα στον άξονα yy΄
Άρα η μεταβολή της ορμής τους θα είναι και αυτή στον άξονα yy΄ με $F_3=\frac{Δp_3}{Δt}=\frac{mυ_3}{Δt}$, όπου $υ_3$ είναι το μέτρο της ταχύτητας του $Σ_3$ μετά την κρούση . Παρόμοια ισχύουν και για το $Σ_4$. Επειδή τα δυο σώματα δεν έχουν



αρχική ορμή αυτό σημαίνει ότι θα έχουν τελική ορμή άρα και ταχύτητα στον άξονα yy΄ Ακόμη από Α.Δ.Ο($_y$) στον άξονα yy΄ έχουμε : $0=m\cdot\upsilon_3-m\cdot\upsilon_4 \Rightarrow \upsilon_3=\upsilon_4$.

Αφού οι σφαίρες είναι λείες, οι μεταξύ τους δυνάμεις τη στιγμή της κρούσης είναι κάθετες προς τις επιφάνειές τους δηλαδή βρίσκονται κατά μήκος της διακέντρου τους.

Έτσι τη στιγμή της σύγκρουσης η καθεμία μάζα δέχεται από τις άλλες δυο, την ίδια κατά μέτρο δύναμη F, με διεύθυνση αυτή της διακέντρου των δυο μαζών που αλληλεπιδρούν. Τότε η $Σ_3$ καθώς και η $Σ_4$ δέχονται κατά τη στιγμή της σύγκρουσης μια συνολική δύναμη $F_3=F_4=\sqrt{F^2+F^2+2F^2συν120^0}=F$. Ενώ η $Σ_1$ και η $Σ_2$ δέχονται μια συνολική δύναμη $F_1=F_2=\sqrt{F^2+F^2+2F^2συν60^0}=F\cdot\sqrt{3}$. (Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί μόνο οι F_1 και F_3 δυνάμεις). Άρα για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει $F_1=F_3\cdot\sqrt{3}$. Έτσι προκύπτει ότι $\dfrac{m(V-\upsilon_0)}{\Delta t}=\dfrac{m\upsilon_3}{\Delta t}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow V-\upsilon_0=\upsilon_3\cdot\sqrt{3} \Rightarrow \upsilon_3=\dfrac{V-\upsilon_0}{\sqrt{3}}$ και για το μέτρο $|\upsilon_3|=\dfrac{|V-\upsilon_0|}{\sqrt{3}}$.

Από την Α.Δ.Ο($_x$) στον άξονα xx΄ έχουμε:

$m\cdot\upsilon_0 - m\cdot\upsilon_0 = m\cdot\upsilon_1+m\cdot\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1=-\upsilon_2$, που σημαίνει ότι οι δυο μάζες μετά την κρούση θα κινηθούν οριζόντια με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα $|\upsilon_1|=|\upsilon_2|=|V|$.

Ακόμη ισχύει $K_{αρχ}=K_{τελ} \Rightarrow 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon_0^2=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot m\cdot V^2+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon_3^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon_0^2=V^2+\upsilon_3^2 \Rightarrow \upsilon_0^2=V^2+\frac{(V-\upsilon_0)^2}{3} \Rightarrow 2\cdot V^2-\upsilon_0\cdot V-\upsilon_0^2=0 \Rightarrow V_{1,2}=\frac{\upsilon_0\pm\sqrt{\upsilon_0^2+8\upsilon_0^2}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{1,2}=\begin{cases}\upsilon=-0{,}5\,m/s\\ \upsilon=1\,m/s\end{cases}$$ Η τιμή υ=1m/s αναπαράγει τις συνθήκες πριν από την κρούση.

Άρα δεχόμαστε ότι V=-0,5 m/s. Τότε για τη υ_3 είναι $|\upsilon_3|=\dfrac{|V-\upsilon_0|}{\sqrt{3}}=\dfrac{1{,}5}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m/s.

Τελικά μετά την κρούση τα $Σ_1$ και $Σ_2$ θα κινηθούν στην αρχική τους διεύθυνση (άξονας xx΄), με αντίθετες φορές από την αρχική τους και με ταχύτητες μέτρου $|\upsilon_1|=|\upsilon_2|=|V|=0{,}5$ m/s. Ενώ τα $Σ_3$ και $Σ_4$ θα κινηθούν στον άξονα yy΄ με ταχύτητες μέτρου $|\upsilon_3|=|\upsilon_4|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m/s και φορές αυτές που φαίνονται στο σχήμα.