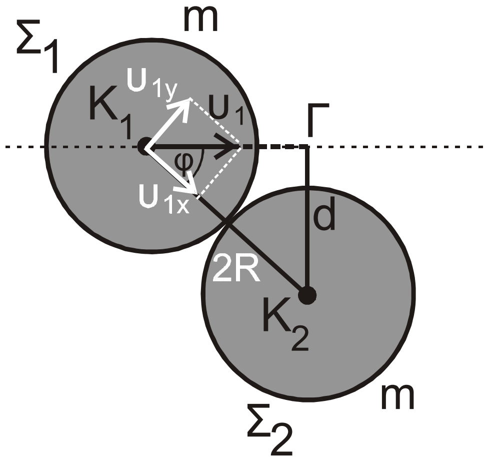
78. Μη μετωπική ελαστική κρούση 2 σφαιρών



Μια σφαίρα $Σ_1$, μάζας m και ακτίνας R κινείται με ταχύτητα $υ_1$ και συγκρούεται ελαστικά και μη μετωπικά με όμοια αρχικά ακίνητη σφαίρα $Σ_2$. Αν d είναι η απόσταση του κέντρου της ακίνητης σφαίρας από το φορέα της $υ_1$, τότε να αποδείξετε ότι οι ταχύτητες των δυο σφαιρών μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις $υ_1'=υ_1\cdot\frac{\sqrt{4R^2-d^2}}{2R}$ και $υ_2'=υ_1\cdot\frac{d}{2R}$

Συνοπτική λύση:

Αφού οι σφαίρες είναι λείες, οι μεταξύ τους δυνάμεις τη στιγμή της κρούσης είναι κάθετες προς τις επιφάνειές τους δηλαδή βρίσκονται κατά μήκος της διακέντρου τους.

Σύμφωνα με τον 3^o Νόμο του Newton οι δυνάμεις μεταξύ των μαζών (δράση – αντίδραση) είναι ίσες και αντίθετες (η «ασθενής» μορφή του $3^{ου}$ Νόμου), αλλά επίσης οι δυνάμεις αυτές κατευθύνονται και κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα κέντρα των δυο σωμάτων (η «ισχυρή» μορφή του $3^{ου}$ Νόμου). Έτσι μπορεί να δικαιολογηθεί και η υπόθεση ότι το άθροισμα των εσωτερικών ροπών είναι μηδέν.

Αν αναλύσουμε την ταχύτητα $υ_1$ της σφαίρας $Σ_1$ τη στιγμή της κρούσης σε δυο συνιστώσες μια κατά τη διεύθυνση της διακέντρου και μια κάθετη σε αυτή τότε έχουμε $υ_{1x}=υ_1\cdot$συνφ και $υ_{1y}= υ_1\cdot$ημφ. Εξαιτίας της $υ_{1x}$ έχουμε μετωπική ελαστική κρούση οπότε οι δυο σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες. Έτσι η $Σ_2$ μετά την κρούση θα κινηθεί κατά μήκος της διακέντρου με ταχύτητα $υ_2'= υ_{1x}=υ_1\cdot$συνφ και η $Σ_1$ θα έχει μόνο τη συνιστώσα $υ_{1y}$ δηλαδή θα έχει μια ταχύτητα $υ_1'$ κάθετη στη διεύθυνση της $υ_2'$ με $υ_1'= υ_{1y}= υ_1\cdot$ημφ. Όμως από το σχήμα έχουμε $(K_1K_2)=2R$, $(K_2Γ)=d$ και $(K_1Γ)= \sqrt{4R^2-d^2}$.

Έτσι προκύπτει συνφ$=\frac{(K_1Γ)}{(K_1K_2)}\Rightarrow$ συνφ$=\frac{\sqrt{4R^2-d^2}}{2R}$ και ημφ$=\frac{(K_2Γ)}{(K_1K_2)}\Rightarrow$ ημφ$=\frac{d}{2R}$.

Τελικά έχουμε $υ_1'= υ_{1y}= υ_1\cdot\frac{d}{2R}$ και $υ_2'= υ_{1x}=υ_1\cdot\frac{\sqrt{4R^2-d^2}}{2R}$.

Το d μπορεί να πάρει τιμές $0\le d\le 2R$ οπότε από τη σχέση ημφ$=\frac{d}{2R}$ φαίνεται ότι η γωνία φ μπορεί να πάρει τιμές $0\le φ\le 90^0$.

Αν d=0, τότε είναι και $φ=0^0$ οπότε έχουμε την περίπτωση της **κεντρικής κρούσης**. Τότε είναι $υ_1'=0$ και $υ_2'=υ_1$ δηλαδή έχουμε **ανταλλαγή** ταχυτήτων.

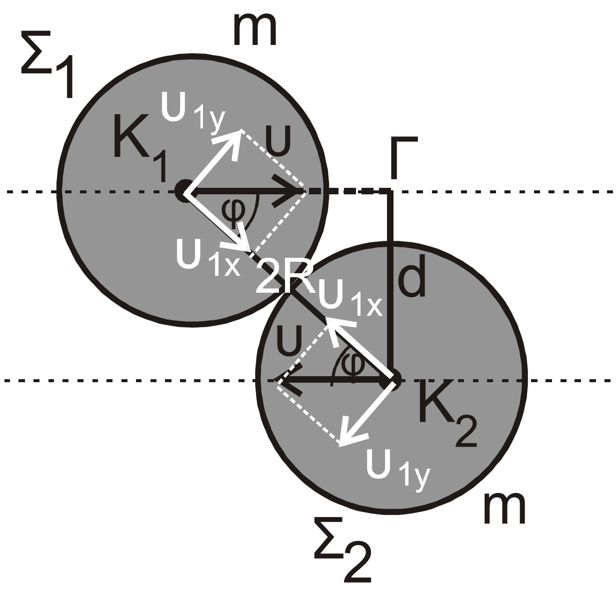
Αν d=2R, τότε είναι και $φ=90^0$ οπότε σφαίρες δε συγκρούονται. Επίσης ισχύει $υ_1'=υ_1$ και $υ_2'=0$ δηλαδή τα σώματα κινούνται όπως και πριν την κρούση.

Ακόμη παρατηρούμε πως η $υ_1'$ αυξάνεται από $0 – υ_1$ καθώς αυξάνεται το d και άρα η γωνία φ, ενώ η $υ_2'$ μειώνεται από $υ_1 – 0$.

Αν όμως θεωρήσουμε ότι και οι δυο μάζες κινούνται με ταχύτητα υ, όπως φαίνεται στο σχήμα και έστω ότι $d=R\cdot\sqrt{2}$ τότε είναι $ημφ=\frac{d}{2R}\Rightarrow$

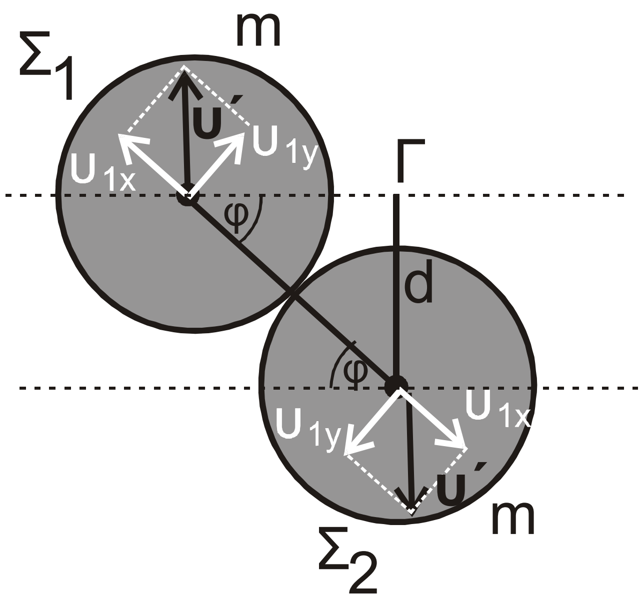
$\Rightarrow ημφ=\frac{R\sqrt{2}}{2R}\Rightarrow ημφ=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow φ=45^0$.

Στη διεύθυνση της διακέντρου η κρούση είναι κεντρική οπότε έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων.



Έτσι έχουμε το παρακάτω σχήμα:

Τότε για τις ταχύτητες υ΄ των δυο ίσων μαζών μετά την κρούση ισχύει ότι $υ΄=\sqrt{υ_{1χ}^2+υ_{1y}^2}=υ$. Άρα σε αυτή την περίπτωση τα μέτρα των ταχυτήτων των δυο σφαιρών μετά την κρούση είναι όσο και πριν από αυτή. Ακόμη παρατηρούμε ότι και μετά την κρούση οι ταχύτητες υ΄ των δυο μαζών εξακολουθούν να είναι παράλληλες και μάλιστα στη συγκεκριμένη περίπτωση ($φ=45^0$) είναι και κάθετες στην αρχική τους διεύθυνση όπως προκύπτει από το σχήμα.



mix-mix@sch.gr