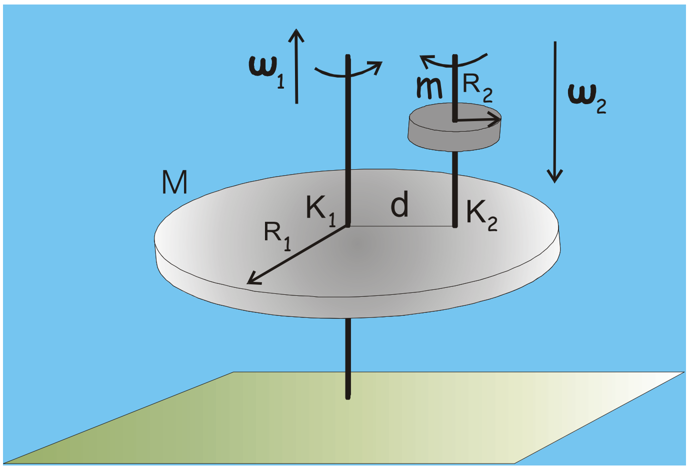
79. Δίσκος πάνω σε δίσκο

Ο δίσκος μάζας M=2 Kg και ακτίνας R_1=1m περιστρέφεται αντιωρολογιακά με γωνιακή ταχύτητα ω_1=4 rad/s. Σε απόσταση d=0,5 m από το κέντρο K_1 του δίσκου M, βρίσκεται το κέντρο K_2 ενός δεύτερου δίσκου μάζας m=1Kg και ακτίνας R_2=0,2 m, που περιστρέφεται ωρολογιακά με γωνιακή ταχύτητα ω_2=250 rad/s, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να υπολογιστεί η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος,
β) Να υπολογιστεί η συνολική στροφορμή του συστήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το K_1 και από το K_2,
γ) Κάποια στιγμή εξασκούμε κατάλληλη ροπή και σταματάει η περιστροφή του δίσκου M, ενώ ο δεύτερος δίσκος μάζας m συνεχίζει να περιστρέφεται με ω_2. Ποια είναι τότε η στροφορμή του δίσκου m, ως προς τον άξονα που διέρχεται από το K_1.
δ) Αν τη στιγμή που περιστρέφονται οι δίσκοι με ω_1 και ω_2 αφήσουμε πάνω στο δίσκο μάζας m, μια σημειακή μάζα m_1=0,5 Kg, που κολλάει σε απόσταση $R_2/2$ από το κέντρο του K_2, τότε να υπολογιστεί μεταξύ ποιών τιμών θα μεταβάλλεται η στροφορμή του συστήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το K_1.

Δίνεται για δίσκο μάζας M και ακτίνας R ότι $I_{cm}=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2$. Θεωρούμε ακόμη (αυθαίρετα), ότι ο άξονας περιστροφής K_2 είναι λείος οπότε δεν ασκεί καμία δύναμη στο δίσκο m και άρα ο δίσκος πραγματοποιεί ανεξάρτητα μια σύνθετη κίνηση.

Συνοπτική λύση:

α) Ο δίσκος μάζας M, πραγματοποιεί στροφική κίνηση γύρω από τον άξονα K_1. Τότε είναι $I_1=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R_1^2=1\ Kg\cdot m^2$.

Το θεώρημα Steiner εφαρμόζεται όταν η κίνηση είναι στροφική ή όταν υπάρχει στιγμιαίος άξονας, όταν δηλαδή όλα τα σημεία του στερεού κάνουν κύκλο γύρω από κάποιο σημείο. Δηλαδή το θεώρημα Steiner εφαρμόζεται όταν τα σώματα περιστρέφονται ως ενιαίο στερεό.
Εδώ όμως υπάρχει λείος άξονας (K_2), που επιτρέπει την περιστροφή του δίσκου μάζας m και έτσι αυτός ο δίσκος συμπεριφέρεται ως υλικό σημείο.

Έτσι ο δίσκος μάζας m, πραγματοποιεί μια σύνθετη κίνηση. Μια στροφική κίνηση γύρω από τον κατακόρυφο άξονα του που διέρχεται από το K_2, και μια κυκλική μεταφορική του κέντρου μάζας του γύρω από το K_1. Τότε είναι,

$I_2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot R_2^2=2\cdot 10^{-2}\ Kg\cdot m^2$.

Η κινητική ενέργεια του δίσκου Μ, είναι $K_1=\frac{1}{2}\cdot I_1\cdot\omega_1^2=\frac{1}{2}\cdot 16=8$ J, ενώ η κινητική ενέργεια του δίσκου m είναι $K_2=\frac{1}{2}\cdot I_2\cdot\omega_2^2+\frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon_{cm}^2$ με $\upsilon_{cm}=\omega_1\cdot d=2$m/s. Άρα έχουμε $K_2=\frac{1}{2}\cdot I_2\cdot\omega_2^2+\frac{1}{2}\cdot m\cdot d^2\cdot\omega_1^2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 250^2+2=625+2\Rightarrow K_2=627$ J.
Οπότε $K_{ολ}=K_1+K_2=8+627\Rightarrow$ **$K_{ολ}$=635 J.**

β) Ως προς το K_1: $L_1=I_1\cdot\omega_1=4$ Kg·m²/s, $L_2=-I_2\cdot\omega_2+m\cdot\upsilon_{cm}\cdot d=-2\cdot 10^{-2}\cdot 250+2\cdot 0{,}5\Rightarrow$
$\Rightarrow L_2=-5+1=-4$ Kg·m²/s, άρα $L_{ολ}=L_1+L_2=4-4\Rightarrow$ **L_2= 0 Kg·m²/s.**

Ως προς το K_2: Από το θεώρημα του Steiner για το δίσκο μάζας Μ έχουμε
$L_1=(I_1+Md^2)\cdot\omega_1=1{,}5\cdot 4=6$ Kg·m²/s, $L_2=-I_2\cdot\omega_2=-2\cdot 10^{-2}\cdot 250\Rightarrow$
$\Rightarrow L_2=-5$ Kg·m²/s, άρα $L_{ολ}=L_1+L_2=6-5\Rightarrow$ **L_2= 1 Kg·m²/s.**

γ) Ο μεγάλος σταματά και μαζί του σταματά η περιφορά του μικρού. Του μένει όμως η ιδιοστροφορμή η οποία δεν εξαρτάται από τον άξονα. Η στροφορμή λόγω ιδιοπεριστροφής είναι η ίδια ως προς κάθε άξονα παράλληλο στον άξονα της ιδιοπεριστροφής. Οπότε έχουμε $L_2=-I_2\cdot\omega_2=-2\cdot 10^{-2}\cdot 250\Rightarrow L_2=-5$ Kg·m²/s.

Αν ο άξονας περιστροφής K_2 δεν είναι λείος και έστω ότι ασκείται από αυτόν μια ροπή οπότε αυτός επιβραδύνεται. Τότε δεν μπορούμε να θεωρήσουμε το δίσκο μάζας m ανεξάρτητο στερεό. Έτσι από το θεώρημα του Steiner και τη στιγμή που ω_2=250rad/s για τη στροφορμή του δίσκου μάζας m ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το K_1 έχουμε:

$L_2=-(I_2+m\cdot d^2)\cdot\omega_2=-(2\cdot 10^{-2}+\frac{1}{4})\cdot 250\Rightarrow L_2=-0{,}27\cdot 250\Rightarrow$ **L_2= -67,5 Kg·m²/s.**

Αν όμως σταματούσε η περιστροφή του μικρού δίσκου μάζας m, τότε για τη στροφορμή του δίσκου μάζας m ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το K_1 και από το θεώρημα του Steiner θα έχουμε,

$L_2=(I_2+m\cdot d^2)\cdot\omega_1=(2\cdot 10^{-2}+\frac{1}{4})\cdot 4\Rightarrow L_2=0{,}27\cdot 4\Rightarrow$ **L_2=1,08 Kg·m²/s.**

δ) Από την Α.Δ.Σ για το σύστημα (m,m_1) και ως προς τον άξονα K_2 έχουμε $L_{αρχ}=L_{τελ}$ ή $I_2\cdot\omega_2=[I_2+m_1\cdot\left(\frac{R_2}{2}\right)^2]\cdot\omega_2'\Rightarrow 2\cdot 10^{-2}\cdot 250=2{,}5\cdot 10^{-2}\cdot\omega_2'\Rightarrow$ **ω_2'=200 rad/s.**

Όταν η m_1 καθώς περιστρέφεται απέχει από το K_1 απόσταση $d-\frac{R_2}{2}$ τότε από την Α.Δ.Σ για το σύστημα (M,m_1) και ως προς τον άξονα K_1 έχουμε $L_{αρχ}=L_{τελ}$ ή $I_1\cdot\omega_1=[I_1+m_1\cdot\left(d-\frac{R_2}{2}\right)^2]\cdot\omega_1'\Rightarrow 4=1{,}08\cdot\omega_1'\Rightarrow$ **ω_1'=3,7 rad/s.**

Όταν η m_1 καθώς περιστρέφεται απέχει από το K_1 απόσταση $d+\frac{R_2}{2}$ τότε από την Α.Δ.Σ για το σύστημα (M,m_1) και ως προς τον άξονα K_1 έχουμε $L_{αρχ}=L_{τελ}$ ή $I_1\cdot\omega_1=[I_1+m_1\cdot\left(d+\frac{R_2}{2}\right)^2]\cdot\omega_1''\Rightarrow 4=1{,}18\cdot\omega_1''\Rightarrow$ **ω_1''=3,4 rad/s.**

➤ Όταν η m_1 απέχει από το K_1 απόσταση $x_{max}= d+\frac{R_2}{2}$ έχουμε,

Για τη μάζα (M): $L_1= I_1\cdot\omega_1''=3{,}4\ Kg\cdot m^2/s$.

Για τη μάζα (m): $L_2= -I_2\cdot\omega_2'+m\cdot\upsilon_{cm}\cdot d$ με $\upsilon_{cm}=\omega_1''\cdot d$ άρα $L_2= -I_2\cdot\omega_2'+m\cdot\omega_1''\cdot d^2\Rightarrow$
$\Rightarrow L_2= -2\cdot10^{-2}\cdot200+3{,}4\cdot\frac{1}{4}\Rightarrow L_2=-4+0{,}85\Rightarrow L_2= -3{,}15\ Kg\cdot m^2/s$.

Για τη μάζα (m_1): $L_3= m_1\cdot\upsilon_{cm}\cdot(d+\frac{R_2}{2})$ με $\upsilon_{cm}=\omega_1''\cdot(d+\frac{R_2}{2})$ άρα

$L_3= m_1\cdot\left(d+\frac{R_2}{2}\right)^2\cdot\omega_1''\Rightarrow L_3=\frac{1}{2}\cdot0{,}36\cdot3{,}4\Rightarrow L_3=0{,}612\ Kg\cdot m^2/s$.

Άρα $L_{max}=L_1+L_2+L_3=3{,}4-3{,}15+0{,}612\Rightarrow$ **$L_{max}= 0{,}862\ Kg\cdot m^2/s$.**

➤ Όταν η m_1 απέχει από το K_1 απόσταση $x_{min}= d-\frac{R_2}{2}$ έχουμε

Για τη μάζα (M): $L_1= I_1\cdot\omega_1'=3{,}7\ Kg\cdot m^2/s$.

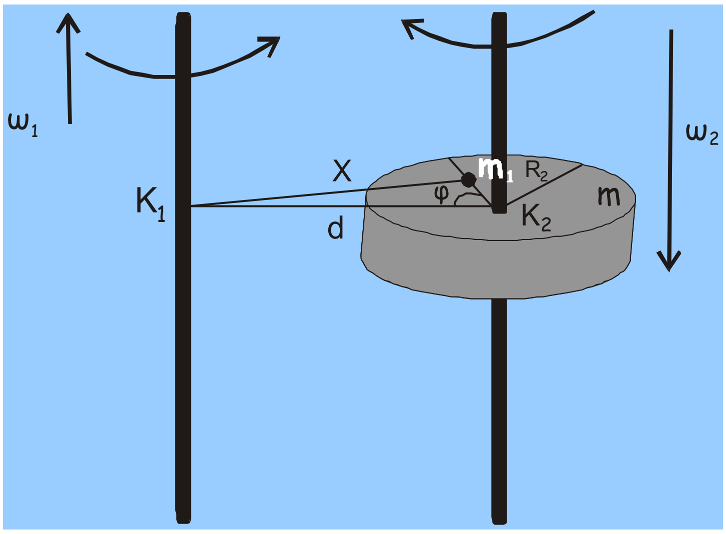
Για τη μάζα (m): $L_2= -I_2\cdot\omega_2'+m\cdot\upsilon_{cm}\cdot d$ με $\upsilon_{cm}=\omega_1''\cdot d$ άρα $L_2= -I_2\cdot\omega_2'+m\cdot\omega_1''\cdot d^2\Rightarrow$
$\Rightarrow L_2= -2\cdot10^{-2}\cdot200+3{,}4\cdot\frac{1}{4}\Rightarrow L_2=-4+0{,}85\Rightarrow L_2= -3{,}15\ Kg\cdot m^2/s$.

Για τη μάζα (m_1): $L_3= m_1\cdot\upsilon_{cm}\cdot(d-\frac{R_2}{2})$ με $\upsilon_{cm}=\omega_1'\cdot(d-\frac{R_2}{2})$ άρα

$L_3= m_1\cdot\left(d-\frac{R_2}{2}\right)^2\cdot\omega_1'\Rightarrow L_3=\frac{1}{2}\cdot0{,}16\cdot3{,}7\Rightarrow L_3=0{,}296\ Kg\cdot m^2/s$.

Άρα $L_{min}=L_1+L_2+L_3=3{,}7-3{,}15+0{,}296\Rightarrow$ **$L_{min}= 0{,}846\ Kg\cdot m^2/s$.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:



Για την απόσταση x, της σημειακής μάζας m_1 από τον άξονα που περνάει από το K_1 ισχύει γενικά (νόμος των συνημιτόνων) ότι

$x^2=d^2+\left(\frac{R_2}{2}\right)^2-2d\frac{R_2}{2}$ συνφ.

Ή $x^2=0{,}26-0{,}1\cdot$συνφ.

Όπου φ είναι η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα του δίσκου m που περνάει από τη μάζα m_1, με την ευθεία που ενώνει τα κέντρα K_1 και K_2.

Φυσικά για $\varphi=0^0$ είναι συνφ=1 και $x^2=d^2+\left(\frac{R_2}{2}\right)^2-2d\frac{R_2}{2}$ ή $x^2=\left(d-\frac{R_2}{2}\right)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow x=d-\frac{R_2}{2}$. Ακόμη για $\varphi=180^0$ είναι συνφ=-1 και $x^2=d^2+\left(\frac{R_2}{2}\right)^2+2d\frac{R_2}{2}$ ή $x^2=\left(d+\frac{R_2}{2}\right)^2 \Rightarrow x=d+\frac{R_2}{2}$.

Ακόμη όταν η m_1 καθώς περιστρέφεται απέχει από το K_1 απόσταση x τότε από την Α.Δ.Σ για το σύστημα (M,m_1) και ως προς τον άξονα K_1 έχουμε $L_{αρχ}=L_{τελ}$ ή $I_1\cdot\omega_1=[I_1+m_1\cdot x^2]\cdot\omega_1' \Rightarrow 4=(1+\frac{x^2}{2})\cdot\omega_1' \Rightarrow \omega_1'=\frac{4}{1+\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \omega_1'=\frac{8}{2+x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_1'=\frac{8}{2{,}26-0{,}1συνφ}$ rad/s.

Για τη μάζα (M): $L_1=I_1\cdot\omega_1'=\frac{8}{2{,}26-0{,}1συνφ}$ Kg·m²/s.

Για τη μάζα (m): $L_2=-I_2\cdot\omega_2'+m\cdot\upsilon_{cm}\cdot d$ με $\upsilon_{cm}=\omega_1'\cdot d$ άρα $L_2=-I_2\cdot\omega_2'+m\cdot\omega_1'\cdot d^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow L_2=-4+\frac{2}{2{,}26-0{,}1συνφ}$ Kg·m²/s.

Για τη μάζα (m_1): $L_3=m_1\cdot\upsilon_{cm}\cdot x$ με $\upsilon_{cm}=\omega_1'\cdot x$ άρα

$L_3=m_1\cdot\omega_1'\cdot x^2 \Rightarrow L_3=\frac{4\cdot(0{,}26-0{,}1συνφ)}{2{,}26-0{,}1συνφ}$ Kg·m²/s.

Άρα $L_{ολ}=L_1+L_2+L_3=\frac{8}{2{,}26-0{,}1συνφ}-4+\frac{2}{2{,}26-0{,}1συνφ}+\frac{4\cdot(0{,}26-0{,}1συνφ)}{2{,}26-0{,}1συνφ} \Rightarrow$

$\Rightarrow L_{ολ}=\frac{10+4\cdot(0{,}26-0{,}1συνφ)}{2{,}26-0{,}1συνφ}-4$ Kg·m²/s.