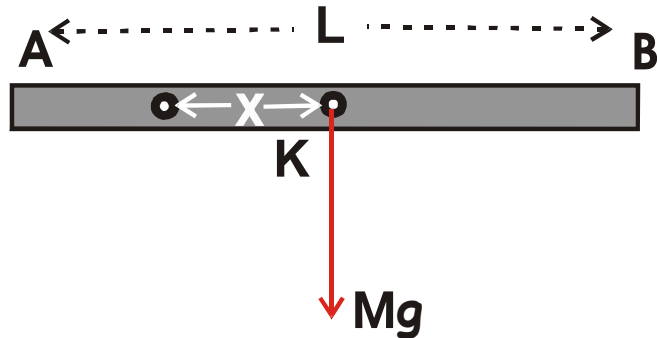


80. Μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση οριζόντιας ράβδου

Λεπτή ομογενής οριζόντια ράβδος μάζας $M=6\text{Kg}$ και μήκους $L=1\text{m}$, μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα σε κατακόρυφο επίπεδο με την επίδραση του βάρους της.

α) Σε ποια απόσταση από το κέντρο μάζας K της ράβδου, πρέπει να βρίσκεται ο άξονας περιστροφής της, ώστε αυτή να περιστρέφεται αρχικά με μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση;

β) Αν θέλουμε αρχικά η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου να είναι $\alpha_{\gamma\omega\nu}=15\text{ rad/s}^2$, τότε πόσα σημεία υπάρχουν πάνω στη ράβδο γύρω από τα οποία η ράβδος περιστρέφεται αρχικά με την παραπάνω επιτάχυνση;



Δίνεται για ράβδο μάζας M και μήκους L ότι $I_{\text{cm}}=\frac{1}{12}\cdot M\cdot L^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Συνοπτική λύση:

α) $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$, όπου $I=(\frac{1}{12}\cdot M\cdot L^2+M\cdot x^2)=0,5+6x^2$. Τότε προκύπτει

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow Mg x=(0,5+6x^2)\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow 60\cdot x=(0,5+6x^2)\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot x^2-60\cdot x+0,5\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}=0$$

$$\Delta\geq 0\Rightarrow 60^2-12\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}^2\geq 0\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}^2\leq 300 \text{ και για } \alpha_{\gamma\omega\nu}\geq 0 \text{ πρέπει } \alpha_{\gamma\omega\nu}\leq 10\cdot\sqrt{3}\text{ rad/s}^2.$$

$$\text{Τότε } \alpha_{\gamma\omega\nu(\text{max})}=10\cdot\sqrt{3}\text{ rad/s}^2 \text{ και } x=\frac{60}{12\alpha_{\gamma\omega\nu}} \text{ ή } x=\frac{\sqrt{3}}{6}\text{ m.}$$

β) Αν η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου (οριζόντια θέση) είναι $\alpha_{\gamma\omega\nu}=15\text{ rad/s}^2$ τότε

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Mg x=(0,5+6x^2)\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60\cdot x=(0,5+6x^2)\cdot 15\Rightarrow$$

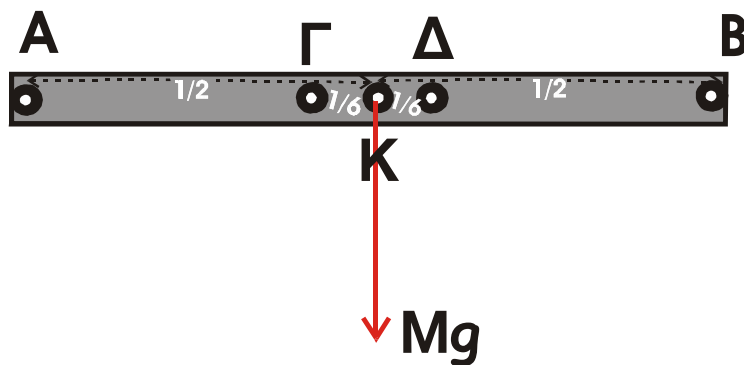
$$\Rightarrow 4x=0,5+6x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^2-4x+0,5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=0,5\text{ m και } \frac{1}{6}\text{ m.}$$

Άρα έχουμε 4 σημεία για τα οποία ισχύει ότι αρχικά η γωνιακή

επιτάχυνση έχει μέτρο $\alpha_{\gamma\omega\nu}=15\text{ rad/s}^2$. Αυτά είναι τα A και B που απέχουν απόσταση 0,5m από το K και τα Γ και Δ που απέχουν $\frac{1}{6}\text{ m}$ από το K.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν ο άξονας περιστροφής περνάει από το Α τότε η επιτρόχιος επιτάχυνση του άλλου άκρου Β της ράβδου είναι $\alpha_e = \frac{\Delta v_{\gamma\rho}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\omega L)}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \cdot L = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot L$ (L το μήκος της ράβδου)
ή $\alpha_e = \alpha_{e(\max)} = 15\text{m/s}^2$.

Ενώ αν ο άξονας περιστροφής περνάει από το Γ τότε η επιτρόχιος επιτάχυνση του άκρου Β της ράβδου είναι $\alpha_e = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot (\frac{L}{2} + \frac{1}{6})$ ή $\alpha_e = 15 \cdot \frac{2}{3}$ ή $\alpha_e = \alpha_{e(\min)} = 10\text{m/s}^2$.

Ακόμη η επιτρόχιος επιτάχυνση του άκρου Α της ράβδου είναι τότε, $\alpha_e = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot (\frac{L}{2} - \frac{1}{6})$
ή $\alpha_e = 15 \cdot \frac{1}{3}$ ή $\alpha_e = 5\text{m/s}^2$.