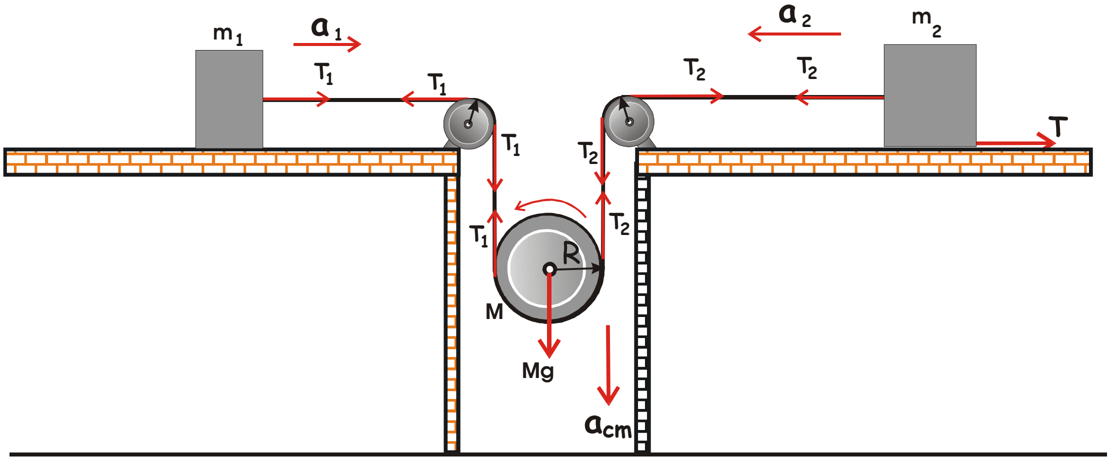
81. Τροχός που «πέφτει» και μάζες που ολισθαίνουν

Γύρω από τον ομογενή τροχό του σχήματος μάζας M=4Kg και ακτίνας R, είναι τυλιγμένο πολλές φορές ένα αβαρές νήμα. Το ένα ελεύθερο άκρο του νήματος μέσω αβαρούς τροχαλίας δένεται με σώμα μάζας m_1=1Kg και το άλλο ελεύθερο άκρο του



νήματος μέσω αβαρούς τροχαλίας δένεται με σώμα μάζας m_2=2Kg. Τα σώματα m_1 και m_2 μπορούν να ολισθαίνουν πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Αφήνουμε τον τροχό ελεύθερο να κινηθεί.

Α) Αν η m_1 ολισθαίνει χωρίς τριβές, τότε για ποιες τιμές της στατικής τριβής ανάμεσα στο οριζόντιο επίπεδο και τη μάζα m_2, η m_2 δεν ολισθαίνει; (παραμένει ακίνητη).

Β) Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο οριζόντιο επίπεδο και τη μάζα m_2 γίνει μ=0,5, τότε να υπολογιστεί η επιτάχυνση της m_2.

Γ) Αν και τα δυο σώματα m_1 και m_2 ολισθαίνουν χωρίς τριβές πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, τότε να υπολογιστούν:

α) Οι επιταχύνσεις των m_1 και m_2,

β) οι τάσεις των νημάτων,

γ) η κινητική ενέργεια του συστήματος όταν ο κύλινδρος «πέσει» κατά x_{cm}=0,42m,

δ) ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας των m_1,m_2 και Μ για x_{cm}=0,42m.

Δίνεται για τον τροχό $I_{cm}=M\cdot R^2$ και $g=10m/s^2$.

Συνοπτική λύση:

Α) Αν α_{cm} είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ είναι η γωνιακή του επιτάχυνση τότε ισχύει ότι $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$. Για τη μεταφορική κίνηση της μάζας m_1 ισχύει $\Sigma F=m_1\cdot\alpha_1 \Rightarrow T_1=m_1\cdot\alpha_1 \Rightarrow T_1=m_1\cdot(\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R) \Rightarrow T_1=2\cdot m_1\cdot\alpha_{cm}$. (1)

Για τον τροχό μάζας Μ και για τη μεταφορική του κίνηση ισχύει:

M: $M\cdot g-T_1-T_2=M\cdot\alpha_{cm}$ (2)

ενώ για τη στροφική του κίνηση ισχύει:

$(T_2-T_1)\cdot R= MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_2-T_1= M\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \Rightarrow T_2-T_1= M\cdot\alpha_{cm}$ (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2) $\wedge$ (3) $\Rightarrow$ $M\cdot g-2T_1=2M\cdot \alpha_{cm}$ και με τη βοήθεια της (1) έχουμε $M\cdot g-4\cdot m_1\cdot \alpha_{cm}=2M\cdot \alpha_{cm} \Rightarrow 40=12\cdot \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm}=\frac{10}{3}$ m/s^2. Τότε $T_1=\frac{20}{3}$ N και (3) $\Rightarrow$ $T_2=\frac{20}{3}+\frac{40}{3} \Rightarrow T_2=20$N. Όμως από την ισορροπία της m_2 προκύπτει $T_2=T_{στ} \Rightarrow$ $T_{στ}=20$N. Άρα θα πρέπει η στατική τριβή $T_{στ}$,ανάμεσα στο οριζόντιο επίπεδο και τη μάζα m_2 να είναι τουλάχιστο 20N, ώστε η m_2 να μην ολισθαίνει. Γενικά θα πρέπει $\mathbf{T_{στ}\geq 20N}$ και για την οριακή της τιμή θα πρέπει $\mu_s\cdot m_2\cdot g\geq 20$ ή $\mu_s\geq 1$.

Β) Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο οριζόντιο επίπεδο και τη μάζα m_2 γίνει μ=0,5, τότε

m_1: $T_1=m_1\cdot \alpha_1 \Rightarrow T_1=m_1\cdot(\alpha_{cm}+\alpha_{γων}\cdot R) \Rightarrow T_1=\alpha_{cm}+\alpha_{γων}\cdot R$ (1)

m_2: $T_2-T=m_2\cdot \alpha_2 \Rightarrow T_2-\mu\cdot m_2\cdot g=m_2\cdot(\alpha_{cm}-\alpha_{γων}\cdot R) \Rightarrow T_2=10+2(\alpha_{cm}+\alpha_{γων}\cdot R)$ (2)

M: Μεταφορική κίνηση: $M\cdot g-T_1-T_2=M\cdot \alpha_{cm} \Rightarrow 40-T_1-T_2=4\cdot \alpha_{cm}$ (3)
Στροφική κίνηση: $(T_2-T_1)\cdot R=MR^2\alpha_{γων} \Rightarrow T_2-T_1=4\cdot \alpha_{γων}\cdot R$ (4)
Με πρόσθεση κατά μέλη των (3) $\wedge$ (4) $\Rightarrow$ $40-2T_1=4\cdot(\alpha_{cm}+\alpha_{γων}\cdot R) \Rightarrow$
$\Rightarrow 20-T_1=2\cdot(\alpha_{cm}+\alpha_{γων}\cdot R)$ (5). Από τις (1) $\wedge$ (5) $\Rightarrow$ $20=3\cdot \alpha_{cm}+3\cdot \alpha_{γων}\cdot R \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_{cm}=\frac{20}{3}-\alpha_{γων}\cdot R$ (6).

(1)$\Rightarrow T_1=\alpha_{cm}+\alpha_{γων}\cdot R \Rightarrow T_1=\frac{20}{3}-\alpha_{γων}\cdot R+\alpha_{γων}\cdot R \Rightarrow T_1=\frac{20}{3}$ N και $T_1=m_1\cdot \alpha_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1=\frac{20}{3}$ m/s^2. Ακόμη (4) $\overset{(1)\wedge(2)}{\Rightarrow}$ $10+2\cdot \alpha_{cm}-2\cdot \alpha_{γων}\cdot R-\alpha_{cm}-\alpha_{γων}\cdot R=4\cdot \alpha_{γων}\cdot R \Rightarrow$
$\Rightarrow 10+\alpha_{cm}=7\cdot \alpha_{γων}\cdot R \Rightarrow \alpha_{cm}=7\cdot \alpha_{γων}\cdot R-10$ (7). (6) $\overset{(7)}{\Rightarrow} 7\cdot \alpha_{γων}\cdot R-10=\frac{20}{3}-\alpha_{γων}\cdot R \Rightarrow$
$\Rightarrow 8\alpha_{γων}\cdot R=\frac{50}{3} \Rightarrow \alpha_{γων}\cdot R=\frac{25}{12}$ m/s^2. Τότε (7)$\Rightarrow \alpha_{cm}=7\cdot\frac{25}{12}-10 \Rightarrow \alpha_{cm}=\frac{55}{12}$ m/s^2.
Τελικά έχουμε $\alpha_2=\alpha_{cm}-\alpha_{γων}\cdot R \Rightarrow \alpha_2=\frac{55}{12}-\frac{25}{12} \Rightarrow \alpha_2=\frac{30}{12} \Rightarrow$ $\mathbf{\alpha_2=2,5\ m/s^2}$.

Γ)
α) Για την επιτάχυνση της μάζας m_1 ισχύει $\alpha_1=\alpha_{cm}+\alpha_{γων}\cdot R$ ενώ για την επιτάχυνση της μάζας m_2 ισχύει $\alpha_2=\alpha_{cm}-\alpha_{γων}\cdot R$.
Τότε

για τη μεταφορική κίνηση της μάζας m_1 ισχύει $\Sigma F=m_1\cdot \alpha_1 \Rightarrow T_1=m_1\cdot \alpha_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow T_1=m_1\cdot(\alpha_{cm}+\alpha_{γων}\cdot R)$ (1). Παρόμοια

για τη μεταφορική κίνηση της μάζας m_2 ισχύει $\Sigma F=m_2\cdot \alpha_2 \Rightarrow T_2=m_2\cdot \alpha_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow T_2=m_2\cdot(\alpha_{cm}-\alpha_{γων}\cdot R)$ (2).

Για τον τροχό μάζας M και για τη μεταφορική του κίνηση ισχύει:

M: $M\cdot g-T_1-T_2=M\cdot \alpha_{cm}$ (3) με πρόσθεση κατά μέλη των

$(1) \wedge (2) \wedge (3) \Rightarrow M\cdot g- m_1\cdot(\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R) - m_2\cdot(\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R) = M\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow$
$\Rightarrow M\cdot g- m_1\cdot\alpha_{cm}- m_1\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R- m_2\cdot\alpha_{cm}+m_2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=M\cdot\alpha_{cm}\Rightarrow$
$\Rightarrow M\cdot g= (M+ m_1+ m_2)\cdot\alpha_{cm} +(m_1- m_2)\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \Rightarrow$ $\mathbf{40=7\cdot\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R}$ (4)

Για τη στροφική κίνηση του τροχού ισχύει:
$(T_2-T_1)\cdot R= MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow T_2-T_1= M\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \Rightarrow$
$\Rightarrow m_2\cdot(\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R) - m_1\cdot(\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R) = M\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cdot(\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R)- \alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R =4\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R\Rightarrow\alpha_{cm}-3\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R =4\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\mathbf{\alpha_{cm}=7\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R\ (5).}$
Από τις $(4) \wedge (5)$ προκύπτει
$40=49\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R\Rightarrow 40=48\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \Rightarrow\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\frac{5}{6}\,m/s^2$ και $\alpha_{cm}=7\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R\Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_{cm}=\frac{35}{6}\ m/s^2.$

Τότε για την επιτάχυνση της μάζας m_1 ισχύει $\alpha_1=\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\frac{35}{6}+\frac{5}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1=\frac{20}{3}\ m/s^2$, ενώ για την επιτάχυνση της μάζας m_2 ισχύει $\alpha_2=\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R\Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_2=\alpha_{cm}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R\Rightarrow \alpha_2=\frac{35}{6}-\frac{5}{6} \Rightarrow\alpha_2=5\ m/s^2.$
β) $T_1=m_1\cdot\alpha_1\Rightarrow T_1=\frac{20}{3}$ N. Παρόμοια $T_2=m_2\cdot\alpha_2\Rightarrow T_2=10N.$
γ) Η κινητική ενέργεια του συστήματος όταν ο κύλινδρος «πέσει» κατά $x_{cm}=0{,}42m$, υπολογίζεται από το Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{(o\lambda)\tau\varepsilon\lambda}-K_{(o\lambda)\alpha\rho\chi}=W_W\Rightarrow K_{(o\lambda)\tau\varepsilon\lambda} =M\cdot g\cdot x_{xm}=40\cdot 0{,}42\Rightarrow$
$\Rightarrow K_{(o\lambda)\tau\varepsilon\lambda} =16{,}8J.$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Για τη μετατόπιση x_1 της m_1 έχουμε, $x_1=\frac{1}{2}\cdot\alpha_1\cdot t^2$, για τη μετατόπιση x_2 της m_2 έχουμε $x_2=\frac{1}{2}\cdot\alpha_2\cdot t^2$, ενώ για τη μετατόπιση x_{cm} της M έχουμε $x_{cm}=\frac{1}{2}\cdot\alpha_{cm}\cdot t^2$. Τότε προκύπτει $\frac{x_{cm}}{x_1}=\frac{\alpha_{cm}}{\alpha_1}=\frac{7}{8}$ ή $x_1=\frac{8}{7}\cdot x_{cm}=0{,}48m$ και $\frac{x_{cm}}{x_2}=\frac{\alpha_{cm}}{\alpha_2}=\frac{7}{6}$ ή $x_2=\frac{6}{7}\cdot x_{cm}=0{,}36m.$
Άρα είναι $K_1=W_1=T_1\cdot x_1=\frac{20}{3}\cdot 0{,}48=3{,}2$ J και $K_2=W_2=T_2\cdot x_2=10\cdot 0{,}36=3{,}6$ J.
Για τον τροχό και από το Θ.Μ.Κ.Ε προκύπτει:
$K_{(M)}= W_{o\lambda}\Rightarrow K_{(M)}=\Sigma F\cdot x_{cm}+\Sigma\tau\cdot\theta\Rightarrow K_{(M)}=(Mg-T_1-T_2)\cdot x_{cm}+(T_2-T_1)\cdot R\cdot\theta.$ Όμως $\theta=\frac{1}{2}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2\Rightarrow R\cdot\theta=\frac{1}{2}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R\cdot t^2$. Τότε προκύπτει $\frac{x_{cm}}{R\cdot\theta}=\frac{\alpha_{cm}}{\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R}=7$ ή
$R\cdot\theta=\frac{1}{7}\cdot x_{cm}=0{,}06m.$ Τότε, $K_{(M)}=(40-\frac{20}{3}-10)\cdot 0{,}42+(10-\frac{20}{3})\cdot 0{,}06\Rightarrow$

$K_{(M)}=9{,}8+0{,}2\Rightarrow K_{(M)}=10$ J. Πράγματι ισχύει $K_{(o\lambda)\tau\varepsilon\lambda} = K_1+ K_2+K_{(M)}= 3{,}2+3{,}6+10\Rightarrow$
$\Rightarrow K_{(o\lambda)\tau\varepsilon\lambda} =16{,}8J.$

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της m_1 είναι, $\frac{\Delta K_1}{\Delta t}=\Sigma F\cdot \upsilon_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\Delta K_1}{\Delta t}=T_1\cdot\upsilon_1$. Όμως $\upsilon_1=\sqrt{2\alpha_1 x_1}=\sqrt{2\frac{20}{3}0{,}48}=0{,}8\cdot\sqrt{10}$ m/s. Άρα

$\frac{\Delta K_1}{\Delta t}=\frac{20}{3}\cdot 0{,}8\cdot\sqrt{10}=\frac{16\sqrt{10}}{3}$ J/s. Παρόμοια για τη m_2 έχουμε, $\frac{\Delta K_2}{\Delta t}=\Sigma F\cdot\upsilon_2\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\Delta K_2}{\Delta t}=T_2\cdot\upsilon_2$. Με $\upsilon_2=\sqrt{2\alpha_2 x_2}=\sqrt{2\cdot 5\cdot 0{,}36}=0{,}6\cdot\sqrt{10}$ m/s. Άρα

$\frac{\Delta K_2}{\Delta t}=10\cdot 0{,}6\cdot\sqrt{10}=6\cdot\sqrt{10}$ J/s. Τέλος για τον τροχό έχουμε $\frac{\Delta K_M}{\Delta t}=\Sigma F\cdot\upsilon_{cm}+\Sigma\tau\cdot\omega\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\Delta K_M}{\Delta t}=\Sigma F\cdot\upsilon_{cm}+\Sigma\tau\cdot\omega\Rightarrow \frac{\Delta K_M}{\Delta t}=(M\cdot g-T_1-T_2)\cdot\upsilon_{cm}+(T_2-T_1)\cdot\omega\cdot R$.

Με $\upsilon_{cm}=\sqrt{2\alpha_{cm}x_{cm}}=\sqrt{2\cdot\frac{35}{6}\cdot 0{,}42}=0{,}7\cdot\sqrt{10}$ m/s. Ακόμη ισχύει

$\omega=\sqrt{2\alpha_{\gamma\omega\nu}\theta}\Rightarrow \omega\cdot R=R\cdot\sqrt{2\cdot\frac{5}{6R}\cdot\theta}=\sqrt{\frac{5R\theta}{3}}$ με $R\cdot\theta=\frac{1}{7}\cdot x_{cm}=0{,}06$m. Άρα

$\omega\cdot R=0{,}1\cdot\sqrt{10}$ m/s. Τελικά προκύπτει

$\frac{\Delta K_M}{\Delta t}=(40-\frac{20}{3}-10)\cdot 0{,}7\cdot\sqrt{10}+(10-\frac{20}{3})\cdot 0{,}1\cdot\sqrt{10}\Rightarrow \frac{\Delta K_M}{\Delta t}=\frac{49\sqrt{10}}{3}+\frac{\sqrt{10}}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\Delta K_M}{\Delta t}=\frac{50\sqrt{10}}{3}$. Τότε για τον συνολικό ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε $\frac{\Delta K_{o\lambda}}{\Delta t}=\frac{\Delta K_1}{\Delta t}+\frac{\Delta K_2}{\Delta t}+\frac{\Delta K_M}{\Delta t}=\frac{84\sqrt{10}}{3}$ ή $\frac{\Delta K_{o\lambda}}{\Delta t}=28\cdot\sqrt{10}$ J/s.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Ισχύει $\frac{\Delta K_{o\lambda}}{\Delta t}=\Sigma F_{\varepsilon\xi}\cdot\upsilon_{cm}=M\cdot g\cdot\upsilon_{cm}\Rightarrow \frac{\Delta K_{o\lambda}}{\Delta t}=40\cdot 0{,}7\cdot\sqrt{10}\Rightarrow \frac{\Delta K_{o\lambda}}{\Delta t}=28\cdot\sqrt{10}$ J/s.

Ακόμη, εφόσον δεν υπάρχουν τριβές και οι τάσεις των νημάτων είναι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος των τριών μαζών, η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται άρα έχουμε $K_{o\lambda}+U=E=\sigma\tau\alpha\theta.$ ή $\frac{\Delta U}{\Delta t}=-\frac{\Delta K_{o\lambda}}{\Delta t}=-28\cdot\sqrt{10}$ J/s.