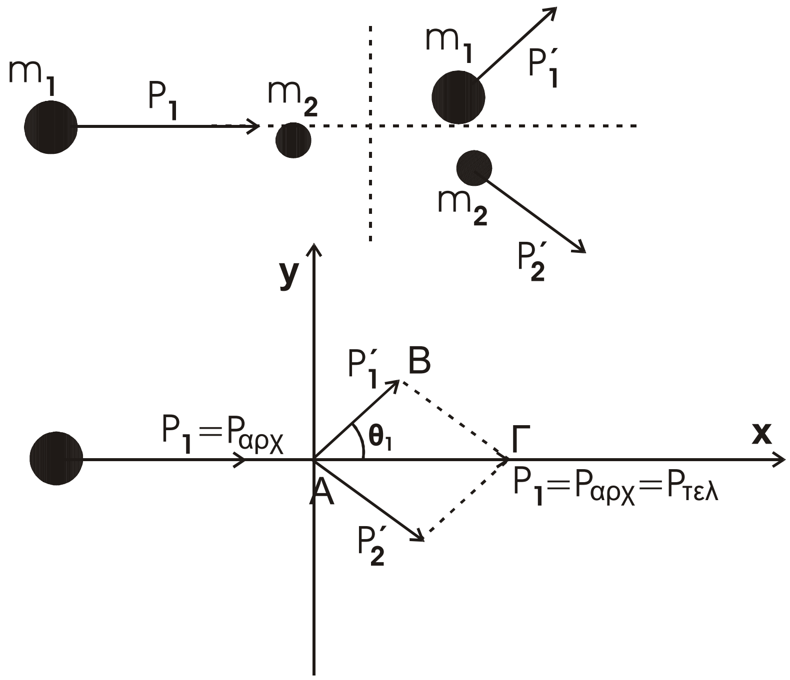
82. Μη μετωπική ελαστική κρούση m_1 και m_2 .2

Μια σφαίρα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα υ=1m/s και συγκρούεται μη μετωπικά και ελαστικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 με $m_1=2m_2$.

Τότε:

α) να υπολογίσετε τη μέγιστη γωνία εκτροπής της m_1 και

β) για τη γωνία εκτροπής που υπολογίσατε να βρείτε τις ταχύτητες υ_1 και υ_2 των δυο μαζών m_1 και m_2 αντίστοιχα, μετά την κρούση.



Συνοπτική λύση:

α) Η κρούση είναι ελαστική οπότε ισχύει $K_{αρχ}=K_{τελ}\Rightarrow \frac{1}{2}m_1\cdot\upsilon^2=\frac{1}{2}m_1\cdot\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\cdot\upsilon_2^2\Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon_2^2=(\upsilon^2-\upsilon_1^2)\,\frac{m_1}{m_2}$ (1) .

Ακόμη από το νόμο των συνημίτονων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$P_2'^2= P_1'^2+P_{αρχ}^2-2\,P_1'\cdot P_{αρχ}\cdot συνθ_1\Rightarrow (m_2\upsilon_2)^2=(m_1\upsilon_1)^2+(m_1\upsilon)^2-2m_1^2\upsilon_1\upsilon συνθ_1\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{m_2^2}{m_1^2}\upsilon_2^2=\upsilon_1^2+\upsilon^2-2\upsilon_1\upsilon συνθ_1$. Τότε από τη σχέση (1) προκύπτει

$\frac{m_2^2}{m_1^2}(\upsilon^2-\upsilon_1^2)\cdot\frac{m_1}{m_2}=\upsilon_1^2+\upsilon^2-2\upsilon_1\upsilon συνθ_1\Rightarrow\upsilon_1^2(1+\frac{m_2}{m_1})+(1-\frac{m_2}{m_1})\upsilon^2-2\upsilon_1\upsilon συνθ_1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow(1+\frac{m_2}{m_1})\,\upsilon_1^2-2\upsilon συνθ_1\cdot\upsilon_1+(1-\frac{m_2}{m_1})\upsilon^2=0$ (2)

$Δ\geq0\Rightarrow4\upsilon^2\cdot συν^2θ_1-4(1+\frac{m_2}{m_1})\cdot(1-\frac{m_2}{m_1})\,\upsilon^2\geq0\Rightarrow\ συν^2θ_1-(1-\frac{m_2^2}{m_1^2})\geq0\Rightarrow$

$\Rightarrow συν^2θ_1\geq1-\frac{m_2^2}{m_1^2}$

Για $m_1=2m_2$ είναι $συν^2θ_1 \geq 1-\frac{1}{4} \Rightarrow συν^2θ_1 \geq \frac{3}{4} \Rightarrow συνθ_1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα η μέγιστη γωνία εκτροπής είναι αυτή για την οποία $συνθ_1=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow θ_1=30^0$.

Γενικά για κάθε $\mathbf{m_1>m_2}$ η εξίσωση $συν^2θ_1 \geq 1-\frac{m_2^2}{m_1^2}$ δίνει **μια και μοναδική μέγιστη γωνία εκτροπής** εξαρτώμενη από τις μάζες m_1 και m_2 η οποία θα παίρνει τιμές από $(0 - 90^0)$.

β) Τότε (2) και για $υ=1$ και $θ_1=30^0 \Rightarrow \frac{3}{2}υ_1^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}υ_1+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 3υ_1^2-2\sqrt{3}\cdot υ_1+1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow υ_1=0,58$ m/s. Ακόμη είναι και (1)$\Rightarrow υ_2^2=2(1-\frac{1}{3}) \Rightarrow υ_2=\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_2=1,16$ m/s.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν είναι $m_2=2m_1$ τότε είναι και $συν^2θ_1 \geq -3$ που ισχύει για κάθε γωνία $θ_1$, άρα η μέγιστη γωνία εκτροπής $θ_1$ **μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από $(0 - 180^0)$.**
Γενικά για κάθε $\mathbf{m_2>m_1}$ η $θ_1$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

Τότε (2) και για $υ=1$m/s και έστω $\mathbf{θ_1=180^0} \Rightarrow 3υ_1^2+2\cdot υ_1-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_1=\frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} \Rightarrow υ_1=\frac{1}{3}$m/s (με αντίθετη φορά αφού $θ_1=180^0$) και (1)$\Rightarrow υ_2^2=\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{9}) \Rightarrow υ_2^2=\frac{4}{9} \Rightarrow υ_2=\frac{2}{3}$m/s. Στην πραγματικότητα εδώ έχουμε την περίπτωση της κεντρικής ελαστικής κρούσης και ισχύουν οι σχέσεις $υ_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ=-\frac{υ}{3}=-\frac{1}{3}$m/s και

$υ_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}υ=\frac{2υ}{3}=\frac{2}{3}$m/s.

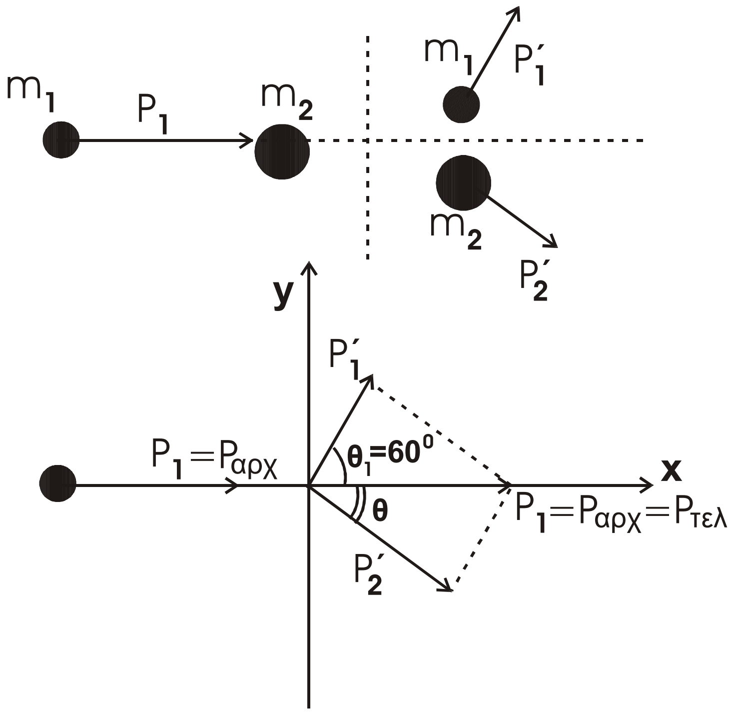
Αν $\mathbf{θ_1=0^0} \Rightarrow 3υ_1^2-2\cdot υ_1-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_1=\frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} \Rightarrow υ_1=1$ m/s (με την ίδια φορά αφού $θ_1=0^0$) και

(1)$\Rightarrow υ_2^2=\frac{1}{2}\cdot(1-1) \Rightarrow υ_2=0$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ισχυριστούμε ότι δεν υπήρξε κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ των μαζών, αφού δε μεταβλήθηκε η ορμή καμίας από αυτές και άρα δεν ασκήθηκε καμία δύναμη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

Μια σφαίρα μάζας m_1=5Kg κινείται (ολισθαίνει) οριζόντια με ταχύτητα υ=1m/s και συγκρούεται μη μετωπικά και ελαστικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας m_2=7Kg. Αν μετά την κρούση η σφαίρα m_1 κινείται με ταχύτητα $υ_1$ που σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία $θ_1=60^0$, τότε να υπολογίσετε την ταχύτητα $υ_1$ καθώς και την ταχύτητα $υ_2$ της m_2, μετά την κρούση. Τριβές δεν υπάρχουν.



Συνοπτική λύση:

α) Η κρούση είναι ελαστική οπότε ισχύει $K_{αρχ}=K_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 \cdot υ^2=\frac{1}{2}m_1 \cdot υ_1^2+\frac{1}{2}m_2 \cdot υ_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_2^2=(υ^2-υ_1^2)\frac{m_1}{m_2} \Rightarrow υ_2^2=\frac{5}{7}\cdot(1-υ_1^2)$ (1) .

Ακόμη από την Α.Δ.Ο στον άξονα xox΄ έχουμε

την Α.Δ.Ο(xx΄): $m_1 \cdot υ=m_1 \cdot υ_1 \cdot συν60^0+m_2 \cdot υ_2 \cdot συνθ \Rightarrow 5=\frac{5υ_1}{2}+7 \cdot υ_2 \cdot συνθ \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_2 \cdot συνθ=\frac{5}{7}\cdot(1-\frac{υ_1}{2})$ (2) .

Από την Α.Δ.Ο στον άξονα yoy΄ έχουμε

την Α.Δ.Ο(yy΄): $0=m_1 \cdot υ_1 \cdot ημ60^0-m_2 \cdot υ_2 \cdot ημθ \Rightarrow 5 \cdot υ_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=7 \cdot υ_2 \cdot ημθ \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_2 \cdot ημθ=\frac{5}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot υ_1$ (3) .

Από την (2) $\Rightarrow υ_2^2 \cdot συν^2θ=\left(\frac{5}{7}\right)^2\cdot(1-\frac{υ_1}{2})^2$ και από την (3) $\Rightarrow$

$υ_2^2 \cdot ημ^2θ=\left(\frac{5}{7}\right)^2\cdot\frac{3}{4}\cdot υ_1^2$. Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$\upsilon_2^2\cdot(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)=\left(\frac{5}{7}\right)^2\cdot(1-\frac{\upsilon_1}{2})^2+\left(\frac{5}{7}\right)^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\upsilon_1^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\upsilon_2^2=\left(\frac{5}{7}\right)^2\cdot(1+\frac{\upsilon_1^2}{4}-\upsilon_1+\frac{3\upsilon_1^2}{4})\Rightarrow\upsilon_2^2=\left(\frac{5}{7}\right)^2\cdot(\upsilon_1^2-\upsilon_1+1)$ (4).

Από τις σχέσεις (1) $\wedge$ (4)$\Rightarrow\frac{5}{7}\cdot(1-\upsilon_1^2)=\left(\frac{5}{7}\right)^2\cdot(\upsilon_1^2-\upsilon_1+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow 1-\upsilon_1^2=\frac{5}{7}\cdot(\upsilon_1^2-\upsilon_1+1)\Rightarrow 7-7\upsilon_1^2=5\cdot\upsilon_1^2-5\cdot\upsilon_1+5\Rightarrow 12\cdot\upsilon_1^2-5\cdot\upsilon_1-2=0\Rightarrow\upsilon_1=\frac{2}{3}=0{,}67$m/s.

Τότε από την (1) προκύπτει $\upsilon_2^2=\frac{5}{7}\cdot[1-\left(\frac{2}{3}\right)^2]\Rightarrow\upsilon_2^2=\frac{5}{7}\cdot(1-\frac{4}{9})\Rightarrow$

$\Rightarrow\upsilon_2^2=\frac{25}{63}\Rightarrow\upsilon_2=\frac{5\sqrt{7}}{21}\Rightarrow\upsilon_2=0{,}62$ m/s.

Ακόμη από την (2) $\Rightarrow\frac{5\sqrt{7}}{21}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{5}{7}\cdot(1-\frac{1}{3})\Rightarrow\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{2}{3}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ και

εύκολα προκύπτει $\eta\mu\theta=\sqrt{\frac{3}{7}}$.