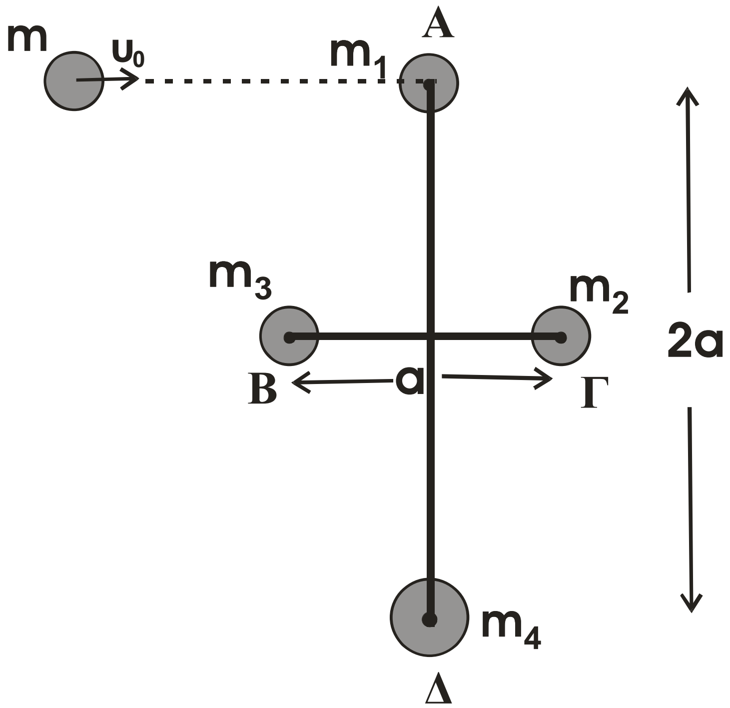
84. Κρούση 5 σφαιρών

Οι τέσσερις μάζες m_1-m_4, συνδέονται μεταξύ τους με αβαρείς ράβδους, κάθετες μεταξύ τους, με τα κέντρα μάζας τους να ταυτίζονται, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ράβδος ΑΔ έχει μήκος (ΑΔ)=2α=2m και η ΒΓ έχει μήκος (ΒΓ)=α=1m. Το σύστημα βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μάζα m κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_0$=15m/s και συγκρούεται πλαστικά με τη μάζα m_1, τότε:



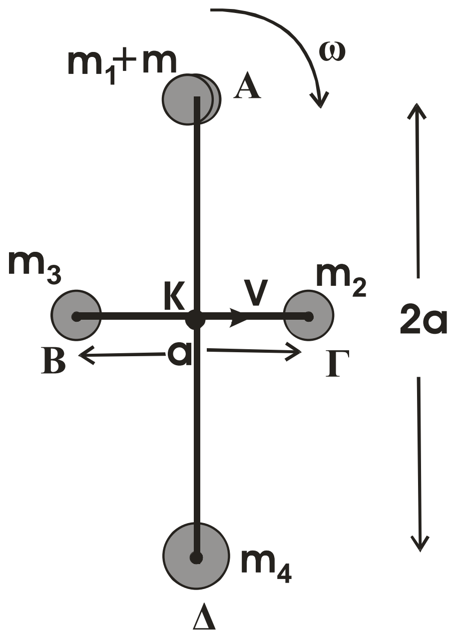
α) Να περιγράψετε το είδος της κίνησης του συσσωματώματος αμέσως μετά τη σύγκρουση,

β) να υπολογίσετε τη μεταφορική ταχύτητα του Κ.Μ του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση,

γ) να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα ω, του συστήματος των μαζών μετά την κρούση. Δίνεται $m_1=m_2=m_3=m$ και $m_4=2m$. Ακόμη θεωρείστε το κέντρο μάζας του συστήματος μετά την κρούση στο σημείο τομής των δυο ράβδων.

δ) Τι ισχύει στην περίπτωση που η ράβδος μήκους α, έχει μάζα M=2m και η ράβδος μήκους 2α, έχει μάζα 2M=4m; Δίνεται για ράβδο μήκους L και μάζας M, ότι $I_{cm}=\frac{1}{12}ML^2$.

Συνοπτική λύση:



α) Ύστερα από την κρούση θα έχουμε ταυτόχρονα και μεταφορική και στροφική κίνηση, γύρω από νοητό άξονα που περνάει από το Κ.Μ του συστήματος και είναι κάθετος στο επίπεδο κίνησης. Εδώ το κέντρο μάζας του συστήματος μετά την κρούση είναι το σημείο τομής Κ, των δυο ράβδων. Η μεταφορική κίνηση μπορεί να μην είναι εμφανής, αν η τριβή ανάμεσα στις μάζες και το τραπέζι είναι σημαντική.

β) Ισχύει για την μεταφορική κίνηση:

Α.Δ.Ο: $\vec{p}_{αρχ}=\vec{p}_{τελ}$ ή $mυ_0=6mV \Rightarrow V=\frac{υ_0}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow$V=2,5m/s.

γ) Για την στροφική κίνηση έχουμε:

Α.Δ.Σ: $\vec{L}_{αρχ}=\vec{L}_{τελ}$ ή $mυ_0(ΚΑ)=I_{ολ}ω$. Είναι (ΚΑ)=α και

$I_{ολ}=(m+m_1)(ΑΚ)^2+m_2(ΓΚ)^2+m_3(ΒΚ)^2+m_4(ΚΔ)^2 \Rightarrow I_{ολ}=4mα^2+2m\frac{α^2}{4}=\frac{9mα^2}{2}$ με

(ΑΚ) =(ΚΔ)=α και (ΒΚ)=(ΓΚ)= $\frac{α}{2}$. Άρα έχουμε $mυ_0α=\frac{9mα^2}{2}ω \Rightarrow ω=\frac{2υ_0}{9α} \Rightarrow$

$\Rightarrow ω=\frac{10}{3}=3{,}33$ rad/s.

δ) Στην περίπτωση που οι ράβδοι έχουν μάζα τότε για την μεταφορική κίνηση του συστήματος και κατά τη διάρκεια της κρούσης έχουμε,

Α.Δ.Ο: $\vec{p}_{αρχ}=\vec{p}_{τελ}$ ή $mυ_0=(6m+6m)V \Rightarrow V=\frac{υ_0}{12} \Rightarrow V=\frac{5}{4}=1{,}25$m/s.

Η ράβδος με μήκος 2α, έχει ως προς το σημείο Κ ροπή αδράνειας $I_1=\frac{1}{12}4m\cdot 4α^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1=\frac{4}{3}mα^2$, ενώ η κάθε ράβδος με μήκος α, έχει $I_2=\frac{1}{12}2mα^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_2=\frac{1}{6}mα^2$, άρα οι δυο ράβδοι έχουν συνολική ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος, $I=I_1+I_2 \Rightarrow I=\frac{3}{2}mα^2$.

Τότε για την στροφική κίνηση έχουμε:

Α.Δ.Σ: $\vec{L}_{αρχ}=\vec{L}_{τελ}$ ή $mυ_0α=I_{ολ}ω$, με $I_{ολ}=\frac{9mα^2}{2}+\frac{3mα^2}{2} \Rightarrow I_{ολ}=6mα^2$.

Άρα έχουμε, $mυ_0α=6mα^2ω \Rightarrow ω=\frac{υ_0}{6α} \Rightarrow ω=2{,}5$rad/s.