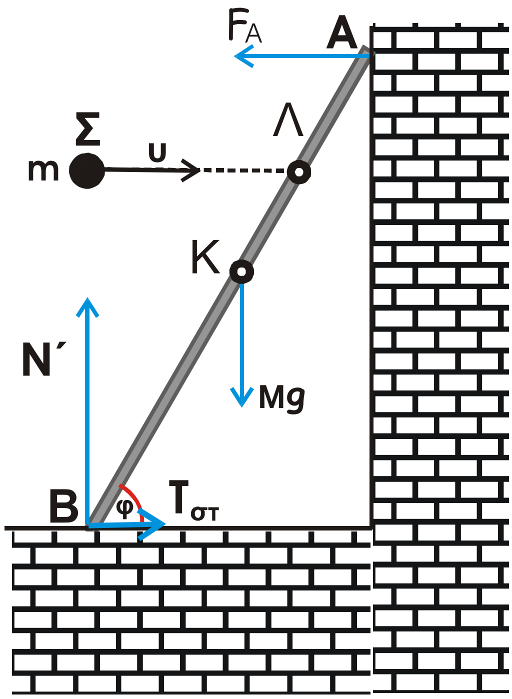
86. Θα ολισθήσει;

Η ομογενής ράβδος ΑΒ του σχήματος έχει μάζα $M=3\sqrt{3}$ Kg και μήκος L=2m. Η ράβδος στηρίζεται με το άκρο της Α σε λείο κατακόρυφο τοίχο και με το άκρο της Β σε οριζόντιο δάπεδο. Ακόμη σχηματίζει με το οριζόντιο δάπεδο γωνία $\varphi=60^0$.

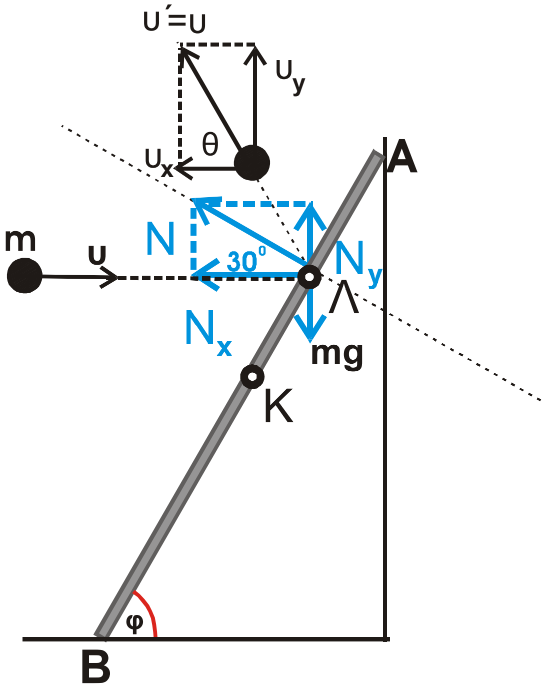
Σφαίρα Σ μάζας m=0,04Kg, κινείται οριζόντια, με σταθερή ταχύτητα, μέτρου υ=10m/s κάθετα στον τοίχο και προσκρούει στη ράβδο στο σημείο Λ σε απόσταση $\frac{L}{4}$ από το άκρο της Α. Η κρούση της σφαίρας με τη ράβδο είναι ελαστική και ο χρόνος επαφής της μ' αυτή είναι $\Delta t=10^{-2}$ s.

Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της ράβδου και του δαπέδου είναι $\mu=\frac{\sqrt{3}}{3}$ τότε να βρείτε αν τη στιγμή της κρούσης η ράβδος ολισθαίνει.

Θεωρείστε ότι μεταξύ της ράβδου και της σφαίρας δεν υπάρχουν τριβές. Δίνεται $g=10m/s^2$.



Συνοπτική λύση:



Η κρούση θεωρείται **ελαστική** άρα ισχύει

$K_{αρχ}=K_{τελ}\Rightarrow \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon'^2 \Rightarrow \upsilon=\upsilon'$.

Ισχύει $\upsilon'_x=\upsilon\cdot$συνθ και $\upsilon_y=\upsilon\cdot$ημθ.

Τότε έχουμε:

$\Delta p_x=-m\upsilon'_x-m\upsilon= -m\upsilon\cdot$συνθ $-m\upsilon= -m\upsilon\cdot(1+$συνθ$)$

και $\Delta p_y=m\upsilon'_y=m\upsilon\cdot$ημθ.

Αν δεν υπάρχουν τριβές, όπως εδώ, τότε στη σφαίρα κατά τη διάρκεια της κρούσης ασκούνται το βάρος της (mg) και η αντίδραση N από το κεκλιμένο επίπεδο, η οποία είναι κάθετη σε αυτό στο σημείο πρόσκρουσης. Η N αναλύεται στις συνιστώσες N_x και N_y.

Για τη δύναμη στον οριζόντιο άξονα έχουμε

$\Sigma F_x=\frac{\Delta p_x}{\Delta t}\Rightarrow N_x=\frac{-m\upsilon(1+\text{συνθ})}{\Delta t}\Rightarrow$

$\Rightarrow N\text{συν}30^0=\frac{-m\upsilon(1+\text{συνθ})}{\Delta t}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{N}{2}=\frac{-m\upsilon(1+\text{συνθ})}{\sqrt{3}\Delta t}$ (1)

Στον κατακόρυφο άξονα έχουμε $\Sigma F_y=\frac{\Delta p_y}{\Delta t}\Rightarrow N_y\text{-}mg=\frac{m\upsilon\eta\mu\theta}{\Delta t}\Rightarrow$

$\Rightarrow N\cdot\eta\mu 30^0=mg+\frac{m\upsilon\eta\mu\theta}{\Delta t}\Rightarrow\frac{N}{2}=mg+\frac{m\upsilon\eta\mu\theta}{\Delta t}$ (2).

Αν λόγω της μικρής διάρκειας της κρούσης η συμβολή του βάρους θεωρηθεί ασήμαντη ($\Omega_B=0$) τότε

(2)$\Rightarrow\frac{N}{2}=\frac{m\upsilon\eta\mu\theta}{\Delta t}$ (3). Οπότε από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει

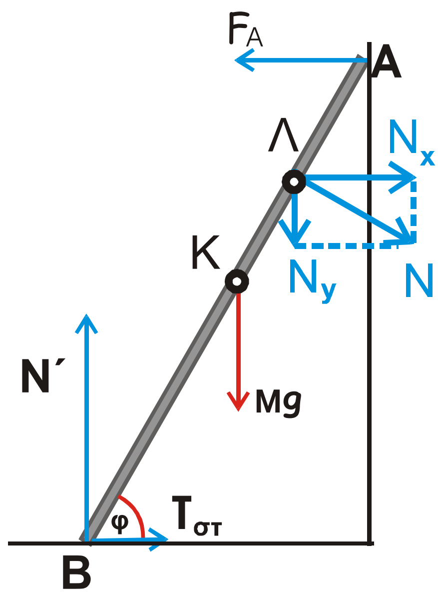
$\frac{-m\upsilon(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{\sqrt{3}\Delta t}=\frac{m\upsilon\eta\mu\theta}{\Delta t}\Rightarrow 1+\sigma\upsilon\nu\theta=\sqrt{3}\,\eta\mu\theta\Rightarrow 3\eta\mu^2\theta=(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 3(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)=1+\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow 3-3\sigma\upsilon\nu^2\theta=1+\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow$

$\Rightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta-2=0\Rightarrow\theta=60^0$.

$N_x=\frac{\Delta p_x}{\Delta t}\Rightarrow N_x=\frac{-m\upsilon(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{\Delta t}\Rightarrow N_x=\frac{-3m\upsilon}{2\Delta t}=-60N$

Παρόμοια έχουμε $N_y=\frac{\Delta p_y}{\Delta t}\Rightarrow N_y=\frac{m\upsilon\eta\mu\theta}{\Delta t}\Rightarrow N_y=20\sqrt{3}\,N$.



Τότε είναι $N=\sqrt{N_x^2+N_y^2}\Rightarrow N=\frac{m\upsilon\sqrt{3}}{\Delta t}\Rightarrow$

$N=\frac{m\upsilon\sqrt{3}}{\Delta t}\Rightarrow N=40\sqrt{3}\,N$ με διεύθυνση κάθετη στη ράβδο.

Τη στιγμή της κρούσης οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι αυτές του διπλανού σχήματος. Τότε από την ισορροπία της ράβδου στον οριζόντιο άξονα ισχύει $\Sigma F_x=0\Rightarrow$
$\Rightarrow F_A=N_x+T_{\sigma\tau}$ (1) . Ακόμη από την ισορροπία της ράβδου στον κατακόρυφο άξονα ισχύει $\Sigma F_y=0\Rightarrow$
$\Rightarrow N_y+Mg=N'\Rightarrow N'=20\sqrt{3}+30\sqrt{3}\Rightarrow$
$\Rightarrow N'=50\sqrt{3}\,N$.

Επίσης από την ισορροπία της ράβδου και παίρνοντας τις ροπές ως προς το σημείο Β έχουμε,

$\Sigma\tau_{(B)}=0\Rightarrow F_A\cdot L\cdot\eta\mu\varphi=N\cdot\frac{3L}{4}+Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi=0\Rightarrow F_A\cdot L\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}\cdot\frac{3L}{4}+30\sqrt{3}\frac{L}{2}\cdot\frac{1}{2}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow F_A=75N$.

Τότε (1)$\Rightarrow T_{\sigma\tau}=F_A-|N_x|\Rightarrow T_{\sigma\tau}=75-60\Rightarrow T_{\sigma\tau}=15$ N.

Όμως η οριακή τριβή είναι $T_{o\rho}=\mu\cdot N'\Rightarrow T_{o\rho}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 50\sqrt{3}\Rightarrow T_{o\rho}=50N$. $T_{\sigma\tau}<T_{o\rho}$, οπότε η ράβδος τη στιγμή της κρούσης δε θα ολισθήσει.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Πριν την κρούση για τη ράβδο ισχύει
$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_A= T_{\sigma\tau}$ (1) . Ακόμη ισχύει $\Sigma F_y=0 \Rightarrow N'=Mg=30\sqrt{3}$ N.

Επίσης παίρνοντας τις ροπές ως προς το σημείο Β έχουμε,
$\Sigma\tau_{(B)}=0 \Rightarrow F_A \cdot L \cdot \eta\mu\varphi = Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow F_A \cdot L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}\,\frac{L}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow F_A=15N.$
Τότε (1)$\Rightarrow T_{\sigma\tau}= F_A \Rightarrow T_{\sigma\tau}=15$ N.
Μήπως η $T_{\sigma\tau}$ δε μεταβάλλεται κατά την κρούση σε όποιο σημείο της ράβδου και να γίνει η κρούση;!!

2. Για την ελάχιστη τιμή της γωνίας φ για την οποία η ράβδος δε γλιστρά στο οριζόντιο δάπεδο έχουμε.

$\Sigma\tau_{(B)}=0 \Rightarrow F_A \cdot L \cdot \eta\mu\varphi = Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow F_A = \frac{15\sqrt{3}}{\varepsilon\varphi\varphi}$.
Ακόμη έχουμε $\Sigma F_x=0 \Rightarrow T_{\sigma\tau}=F_A \Rightarrow T_{\sigma\tau}=\frac{15\sqrt{3}}{\varepsilon\varphi\varphi}$ και $\Sigma F_y=0 \Rightarrow N'=Mg=30\sqrt{3}$ N.
Τότε για να μην έχουμε ολίσθηση πρέπει να ισχύει
$T_{\sigma\tau} \le \mu N \Rightarrow \frac{15\sqrt{3}}{\varepsilon\varphi\varphi} \le \mu \cdot 30\sqrt{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi \ge \frac{1}{2\mu} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\varphi \ge 41^0$ ή $\varphi_{min}=41^0$. Για κάθε γωνία μικρότερη από 41^0 η ράβδος ολισθαίνει.