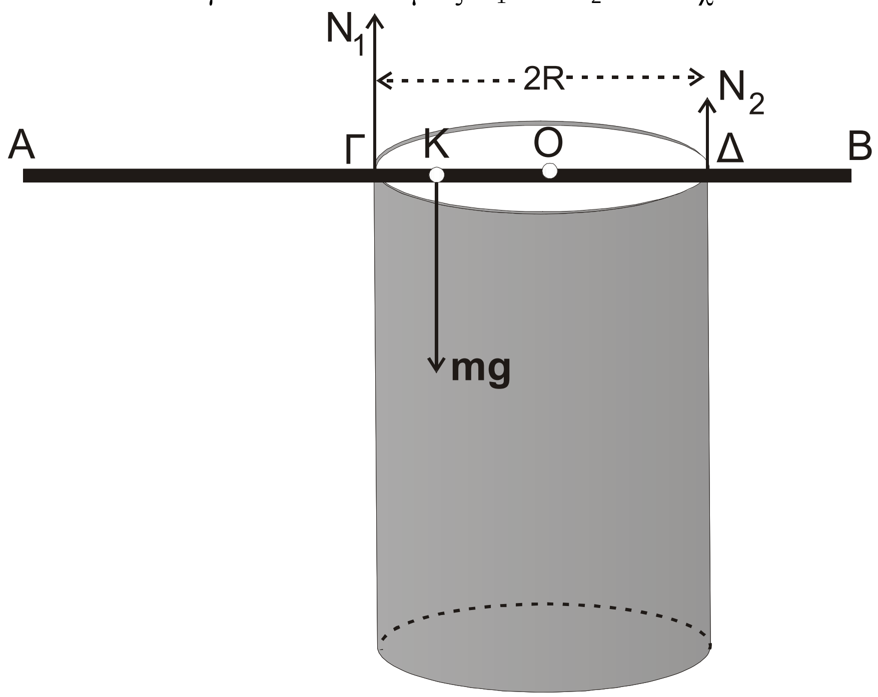
87. Το μολύβι και η πασχαλίτσα

Πάνω σε κυλινδρικό ποτήρι με διάμετρο δ=6cm, ισορροπεί οριζόντια ένα λεπτό ομογενές μολύβι μήκους (ΑΒ)=L=15 cm και μάζας m=18g, έτσι ώστε να βρίσκεται κατά μήκος μιας διαμέτρου του στομίου του ποτηριού.

α) Σε ποια θέση πρέπει να βρίσκεται το κέντρο μάζας Κ του μολυβιού, ως προς το κέντρο Ο του στομίου του ποτηριού, ώστε αυτό να ισορροπεί οριακά;

β) Έστω ότι το κέντρο μάζας Κ του μολυβιού, απέχει οριζόντια απόσταση 2cm από το κέντρο Ο του στομίου του ποτηριού και ισορροπεί οριζόντια κατά μήκος μιας διαμέτρου του στομίου. Τότε να υπολογιστούν οι δυνάμεις N_1 και N_2 που δέχεται το μολύβι από το χείλος του ποτηριού.



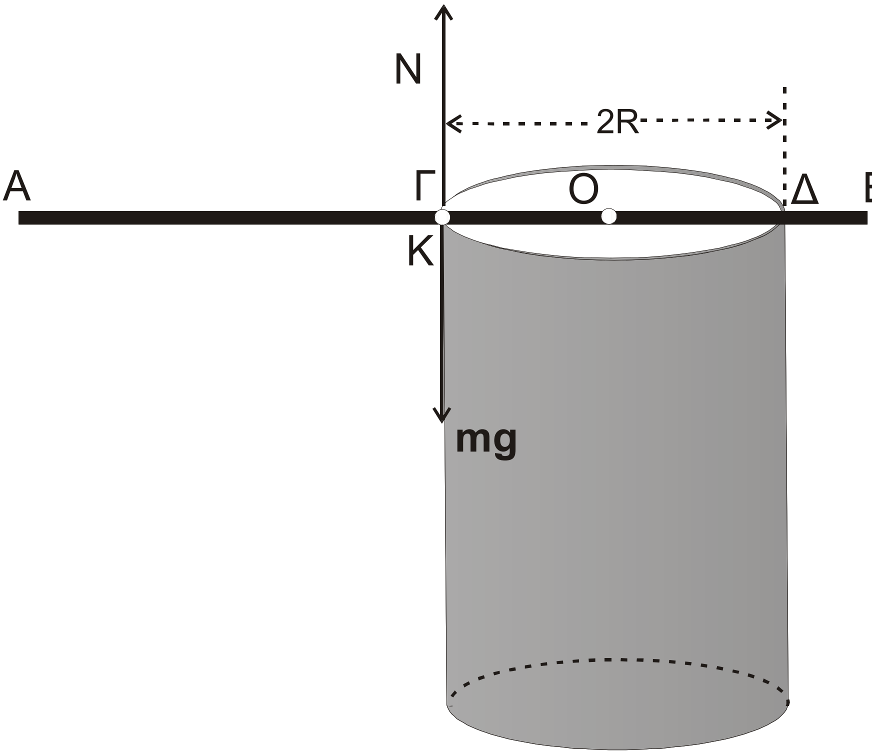
γ) Μια πασχαλίτσα μάζας m_1= 4g περπατάει κατά μήκος του μολυβιού από το κέντρο μάζας του προς το άκρο του Α. Σε ποια ελάχιστη απόσταση από το Ο πρέπει να βρίσκεται αυτή ώστε το μολύβι να ανατραπεί; Θεωρείστε ότι αρχικά το μολύβι ισορροπεί όπως στην περίπτωση (β).

δ) Αν σε εκείνη τη θέση η πασχαλίτσα πετάξει και βρεθεί σε απόσταση 5 cm από το σημείο Γ, τότε ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος μολύβι – πασχαλίτσα τη στιγμή της ανατροπής;

Δίνεται για το μολύβι $I_{cm}=\frac{1}{12}\cdot m\cdot L^2$ και $g=10m/s^2$.

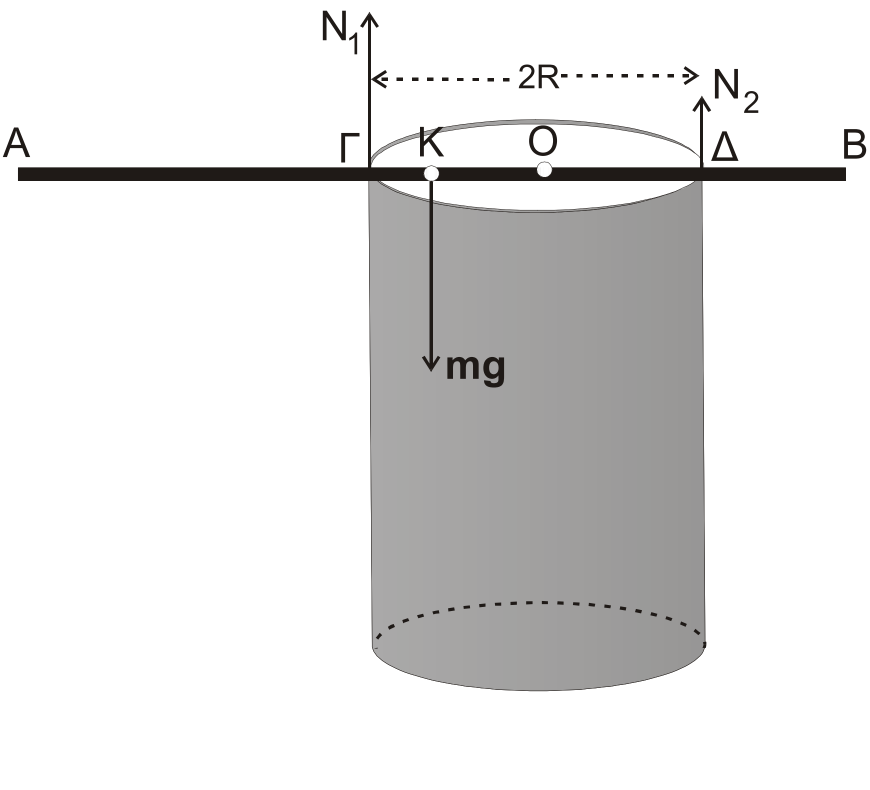
Συνοπτική λύση:

α) Μόλις το κέντρο μάζας Κ του μολυβιού έρθει στο σημείο Γ του χείλους του ποτηριού τότε το μολύβι θα ισορροπεί οριακά. Τότε ισχύει $\Sigma\tau_{(\Gamma)}=0 \Rightarrow \tau_w=\tau_N=0$. Ακόμη είναι $\Sigma F=0 \Rightarrow N=mg=0{,}18N$.

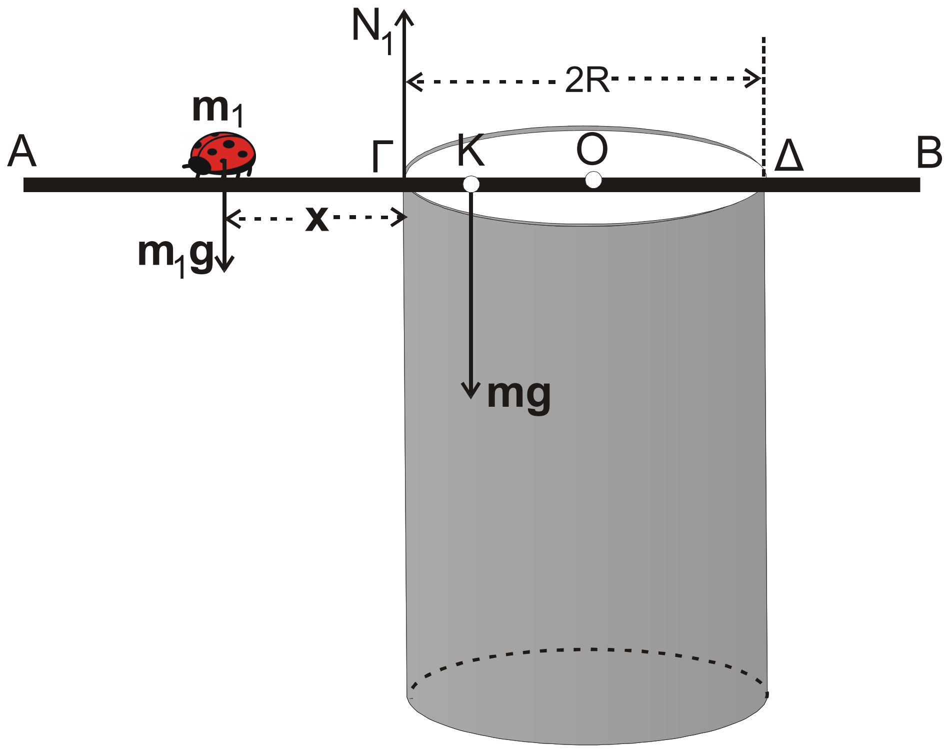


β) $\Sigma\tau_{(K)}=0 \Rightarrow N_1\cdot(K\Gamma)=N_2\cdot[R+(OK)] \Rightarrow N_1=5N_2$.

Ακόμη $\Sigma F=0 \Rightarrow N_1+N_2=mg \Rightarrow 6N_2=mg \Rightarrow N_2=\dfrac{mg}{6}=0{,}03N$ και $N_1=5N_2=0{,}15N$.



γ) $\Sigma\tau_{(\Gamma)}=0 \Rightarrow m_1 \cdot g \cdot x = m \cdot g \cdot (K\Gamma) \Rightarrow x = \dfrac{m \cdot (K\Gamma)}{m_1} \Rightarrow x = 4{,}5cm$ και $(Om_1)=7{,}5cm$.



δ) Για τη ροπή αδράνειας του μολυβιού ως προς το σημείο Γ και σύμφωνα με το θεώρημα του Steiner έχουμε:

$I_\mu = \dfrac{1}{12} \cdot m \cdot L^2 + m \cdot (K\Gamma)^2 \Rightarrow I_\mu = \dfrac{1}{12} \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 225 \cdot 10^{-4} + 18 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow I_\mu = 337{,}5 \cdot 10^{-7} + 18 \cdot 10^{-7} \Rightarrow I_\mu = 355{,}5 \cdot 10^{-7}\ Kg \cdot m^2$.

Τότε είναι $I_{o\lambda} = I_\mu + m_1 \cdot x^2 \Rightarrow I_{o\lambda} = 355{,}5 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 10^{-3} \cdot 5^2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow I_{o\lambda} = 455{,}5 \cdot 10^{-7}\ Kg \cdot m^2$.

Τελικά έχουμε $\Sigma\tau_{(\Gamma)} = I_{o\lambda} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow m_1 \cdot g \cdot x - m \cdot g \cdot (K\Gamma) = I_{o\lambda} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-2} - 18 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 455{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$200 \cdot 10^{-5} - 180 \cdot 10^{-5} = 718 \cdot 10^{-7} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{2.000}{455{,}5} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 4{,}4\ rad/s^2$.