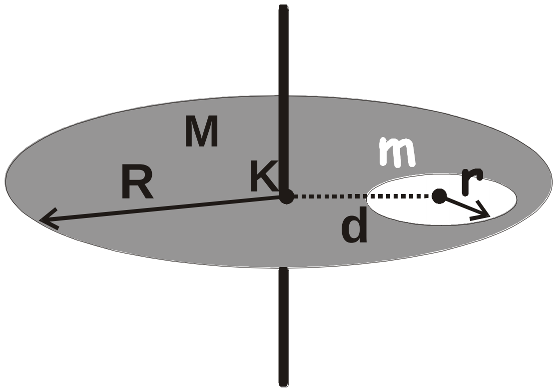
# 88. Ροπή αδράνειας δίσκου με οπή

α) Ένας επίπεδος συμπαγής δίσκος μάζας M και ακτίνας R έχει μια κυκλική οπή ακτίνας r (r<R). Το κέντρο της οπής απέχει από το κέντρο του δίσκου απόσταση d με d<R. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του στερεού δίσκου με την οπή γύρω από άξονα περιστροφής που περνάει από το κέντρο του δίσκου και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου.




β) Αν στη συνέχεια ξαναβάλουμε το κομμάτι που αφαιρέσαμε πίσω στη θέση του και προσθέσουμε λιπαντικό, ώστε να μην υπάρχουν τριβές, πόση γίνεται τότε η ισοδύναμη ροπή αδράνειας I΄ του καινούργιου συστήματος ως προς τον αρχικό άξονα περιστροφής που περνάει από το κέντρο K του δίσκου;

Δίνεται για το συμπαγή δίσκο

$I_{cm}=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2$.

**Συνοπτική λύση:**

α) Αντιμετωπίζουμε την οπή σαν δίσκο «αρνητικής» μάζας.

Για το συμπαγή δίσκο έχουμε $I_1=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2$.

Η οπή δεν περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της. Έτσι θα πρέπει να πάρουμε το θεώρημα των παράλληλων αξόνων (Steiner).

Τότε για τη ροπή αδράνειας της κυκλικής οπής ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του δίσκου έχουμε $I_2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2+m\cdot d^2$.

Για την πυκνότητα του υλικού του δίσκου ισχύει $\rho=\frac{M}{\pi R^2}$ ή $M=\rho\pi R^2$. Περαιτέρω για τη μάζα της οπής που θεωρούμε ότι είναι από το ίδιο υλικό είναι $m=\rho\pi r^2$. Προκύπτει λοιπόν $\frac{m}{M}=\frac{r^2}{R^2}$ ή $m=\frac{r^2}{R^2}\cdot M$. Έτσι έχουμε $I_2=M\cdot\frac{r^2}{R^2}\cdot(\frac{r^2}{2}+d^2)$.

Τελικά για τη ροπή αδράνειας του δίσκου με την οπή γύρω από άξονα περιστροφής που περνάει από το κέντρο του δίσκου έχουμε,

$I=I_1-I_2=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2-M\cdot\frac{r^2}{R^2}\cdot(\frac{r^2}{2}+d^2)$ ή $I=\frac{1}{2}\cdot M\cdot[R^2-\frac{r^2}{R^2}(r^2+2d^2)]$. Ισοδύναμα μπορούμε να έχουμε και $I=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2-(\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2+md^2)$.

β) Αν στη συνέχεια επανατοποθετήσουμε πίσω το τμήμα του δίσκου ακτίνας r που αρχικά αφαιρέσαμε, τότε λόγω του λιπαντικού αυτό δεν περιστρέφεται με τον υπόλοιπο δίσκο ως ενιαίο στερεό. Τότε ο μικρός δίσκος συμπεριφέρεται ως υλικό σημείο, και το Κ.Μ του πραγματοποιεί μια κυκλική μεταφορική κίνηση σε απόσταση d από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο Κ του μεγάλου δίσκου. Έτσι έχουμε,

$I'=I+md^2 \Rightarrow I'=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2-(\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2+md^2)+md^2 \Rightarrow I'=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2-\frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2$.

Ακόμη για $m=\frac{r^2}{R^2}\cdot M$, προκύπτει $I'=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2-\frac{1}{2}\cdot M\cdot\frac{r^2}{R^2}\cdot r^2 \Rightarrow I'=\frac{1}{2}\cdot M\cdot(R^2-\frac{r^4}{R^2})$.


mix-mix@sch.gr