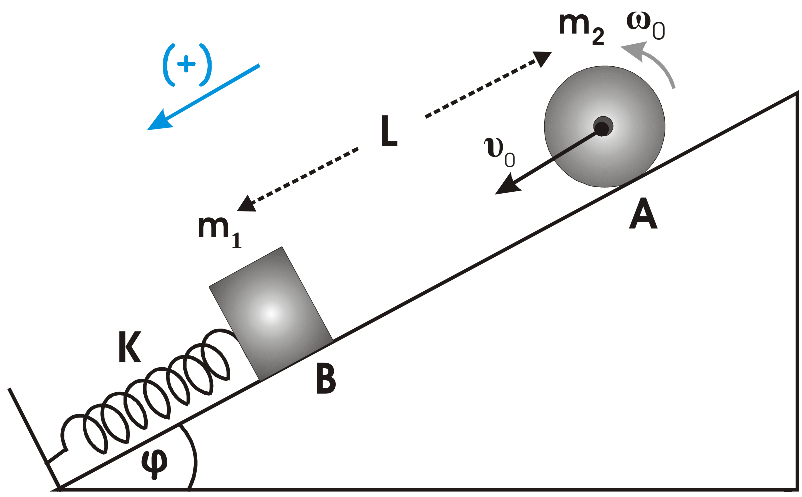
89. Σύνθετη κίνηση σφαίρας και κρούση σε κεκλιμένο επίπεδο.



Ελατήριο σταθεράς K=300N/m, βρίσκεται πάνω σε λείο πλάγιο επίπεδο, με κλίση $\varphi=30^0$, όπως στο σχήμα. Στο πάνω άκρο του ελατηρίου ισορροπεί σώμα μάζας m_1=3Kg, ενώ το κάτω άκρο του είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Από το σημείο Α που απέχει απόσταση L=0,9m από το m_1, ρίχνεται σφαίρα μάζας m_2=1Kg και ακτίνας R=10cm η οποία εκτελεί σύνθετη κίνηση. Μια μεταφορική με αρχική ταχύτητα υ_0=4m/s και μια στροφική με ω_0=10rad/s. Η σφαίρα μένει συνεχώς σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο και κατεβαίνοντας συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με τη μάζα m_1, τη χρονική στιγμή t_0=0 s.

α) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια της σφαίρας λίγο πριν την κρούση,

β) Ποια είναι η στροφορμή της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση ως προς σημείο του κεκλιμένου επιπέδου;

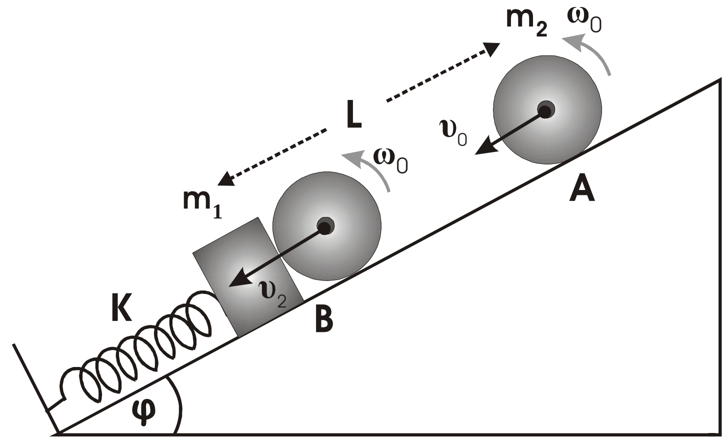
γ) Σε ποια θέση η σφαίρα m_2 μετά την κρούση θα έχει την ελάχιστη κινητική της ενέργεια για πρώτη φορά; Πόση είναι αυτή;

δ) Ποιες χρονικές στιγμές η μάζα m_1 θα αποκτάει τη μέγιστη κινητική της ενέργεια αν πραγματοποιεί α.α.τ; Πόση είναι αυτή;

Οι επιφάνειες των μαζών θεωρούνται λείες. Θεωρείστε ακόμη την προς τα κάτω φορά θετική, ότι η διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή και ότι κατά την κρούση καμία μάζα δεν αναπηδά.

Δίνεται για τη σφαίρα $I_{cm}=\frac{2}{5}\cdot m_2\cdot R^2$ και $g=10m/s^2$.

Συνοπτική λύση:



α) Κατά τη διάρκεια της κίνησης η $\vec{\omega}_0$ παραμένει σταθερή, αφού δε υπάρχει κάποια εξωτερική ροπή. Άρα $\omega_2=\omega_0$, όπου ω_2 είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας τη στιγμή της κρούσης. Επίσης η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς το κέντρο μάζας της είναι,

$I= I_{cm}= \frac{2}{5}\cdot m_2\cdot R^2=\frac{2}{5}\cdot 10^{-2}=4\cdot 10^{-3} Kg\cdot m^2$.

Τότε Θ.Μ.Κ.Ε (Α→Β): $K_{τελ}-K_{αρχ}=W_w \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot \upsilon_2^2+\frac{1}{2}\cdot I\cdot \omega_2^2-\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot \upsilon_0^2-\frac{1}{2}\cdot I\cdot \omega_0^2=m_2\cdot g\cdot ημφ\cdot L \Rightarrow \upsilon_2^2=\upsilon_0^2+g\cdot L \Rightarrow \upsilon_2^2=16+9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon_2^2=25 \Rightarrow \upsilon_2=5m/s$, όπου $\omega_2=\omega_0=10$ rad/s. Τότε $K_{τελ}=\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot \upsilon_2^2+\frac{1}{2}\cdot I\cdot \omega_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow K_{τελ}=\frac{1}{2}\cdot 25+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 10^{-3}\cdot 10^2 \Rightarrow K_{τελ}=12{,}5+0{,}2 \Rightarrow K_{τελ}=12{,}7$ J.

β) Για τις μεταφορικές ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση θα ισχύει $\upsilon_1'=\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1'=2{,}5m/s$ και $\upsilon_2'=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2'= -2{,}5m/s$. Για την ελαστική κρούση των δυο σωμάτων και για τη στροφική κίνηση ισχύει η Α.Δ.Σ: $\vec{L}_{αρχ}=\vec{L}_{τελ}$ ή $I\omega_2=I\omega_2' \Rightarrow \omega_2'=\omega_2=\omega_0=10$ rad/s.

Αλλιώς από την Α.Δ.Σ ως προς το κεκλιμένο επίπεδο έχουμε $\vec{L}_{αρχ}=\vec{L}_{τελ}$ ή $m_2\cdot \upsilon_2\cdot R+I\cdot \omega_2=I\omega_2'-m_2\cdot \upsilon_2'+m_1\cdot \upsilon_1'\cdot R \Rightarrow 5\cdot 10^{-1}+4\cdot 10^{-2}=4\cdot 10^{-3}\cdot \omega_2'-25\cdot 10^{-2}+75\cdot 10^{-2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 54\cdot 10^{-2}=0{,}4\cdot 10^{-2}\cdot \omega_2'+50\cdot 10^{-2} \Rightarrow \omega_2'=10$ rad/s$= \omega_2=\omega_0$. *(Βέβαια αυτό προϋποθέτει και το Κ.Μ της m_1 να απέχει απόσταση R, από το κεκλιμένο επίπεδο, ώστε η κρούση να θεωρείται κεντρική).*

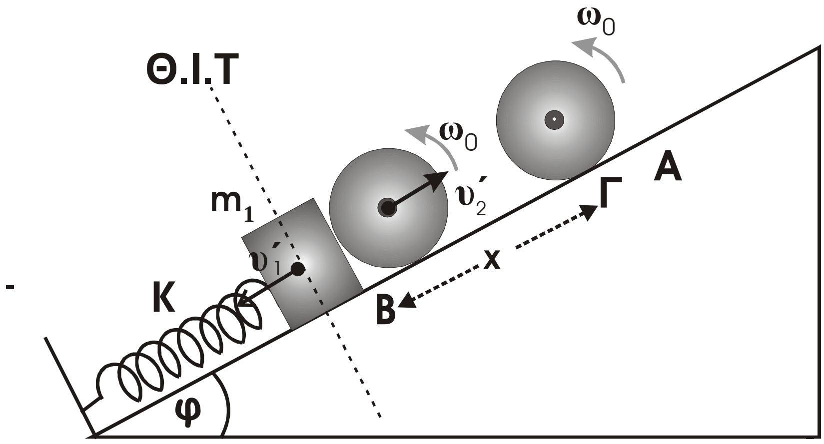
Δηλαδή η σφαίρα m_2 μετά τη σύγκρουση θα περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα κατά μέτρο και κατεύθυνση.
Για την **ιδιοστροφορμή** της σφαίρας έχουμε $L_1=I\cdot \omega_2' \Rightarrow L_1=4\cdot 10^{-3}\cdot 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow L_1=4\cdot 10^{-2}$ $Kg\cdot m^2/s$.
Για την **τροχιακή στροφορμή** της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση ως προς σημείο του κεκλιμένου επιπέδου, έχουμε $L_2=-m_2\cdot \upsilon_2'\cdot R \Rightarrow L_2= -25\cdot 10^{-2}$ $Kg\cdot m^2/s$.

Άρα η συνολική στροφορμή της σφαίρας ως προς σημείο του κεκλιμένου επιπέδου είναι $L=L_1+L_2 \Rightarrow L=4\cdot 10^{-2} -25\cdot 10^{-2} \Rightarrow L=-21\cdot 10^{-2}$ $Kg\cdot m^2/s$.

γ) Μετά την κρούση η m_2 θα διανύσει απόσταση x μέχρι που θα σταματήσει η μεταφορική της κίνηση, ενώ η γωνιακή της ταχύτητα θα είναι ω_2' ίση με ω_0=10rad/s. Εκείνη τη στιγμή η κινητική της ενέργεια θα είναι η ελάχιστη. Τότε

Θ.Μ.Κ.Ε (Β→Γ): $K_{τελ}-K_{αρχ}=W_w\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_0^2-\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\upsilon_2'^2-\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_0^2 = -m_2\cdot g\cdot ημφ\cdot x\Rightarrow \upsilon_2'^2=g\cdot x\Rightarrow x=\frac{\upsilon_2'^2}{g}\Rightarrow x=0{,}625\text{m}.$$



$$K_{min}=\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_2'^2=\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_0^2=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 10^{-3}\cdot 10^2\Rightarrow K_{min}=0{,}2\text{ J}.$$

δ) Η μάζα m_1 θα αποκτάει της μέγιστη κινητική της ενέργεια, όταν καθώς ταλαντώνεται βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δηλαδή για x=0.

Όμως x=Αημωt με $\upsilon_1'=\upsilon_{max}=\omega\cdot A=2{,}5$m/s, όπου $\omega=\sqrt{\frac{K}{m_1}}=10$rad/s.

Τότε είναι Α=0,25 m. Για x=0⇒ ημωt=0⇒ωt=κπ⇒ $t=κ\frac{\pi}{\omega}=0{,}1κπ$ ή $t=κ\frac{T}{2}$ με $κ\in Z^+$.

Για τη μέγιστη κινητική ενέργεια της m_1 έχουμε $K_{max}=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot \upsilon_1'^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow K_{max}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6{,}25\Rightarrow K_{max}=9{,}375\text{ J}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Από την Α.Δ.Σ του συστήματος των m_1 και m_2 κατά την κρούση και ως προς σημείο του κεκλιμένου επιπέδου είναι $L_{αρχ}= m_2\cdot\upsilon_2\cdot R+I\cdot\omega_2=4\cdot 10^{-2}+5\cdot 10^{-1}=54\cdot 10^{-2}$ Kg·m²/s. $L_{τελ}=L_2'+L_1'$ όπου L_2' είναι η τελική στροφορμή της σφαίρας ως προς το κεκλιμένο επίπεδο με $L_2'= I\omega_2'-m_2\cdot\upsilon_2'\cdot R=4\cdot 10^{-2}-25\cdot 10^{-2}=-21\cdot 10^{-2}$ Kg·m²/s και L_1' είναι η στροφορμή της m_1 μετά την κρούση και ως προς σημείο του κεκλιμένου επιπέδου με $L_1'= m_1\cdot\upsilon_1'\cdot R=75\cdot 10^{-2}$ Kg·m²/s. Τότε $L_{τελ}=-21\cdot 10^{-2}+75\cdot 10^{-2}=54\cdot 10^{-2}$ Kg·m²/s.

Άρα πράγματι ισχύει $\vec{L}_{αρχ}=\vec{L}_{τελ}$.