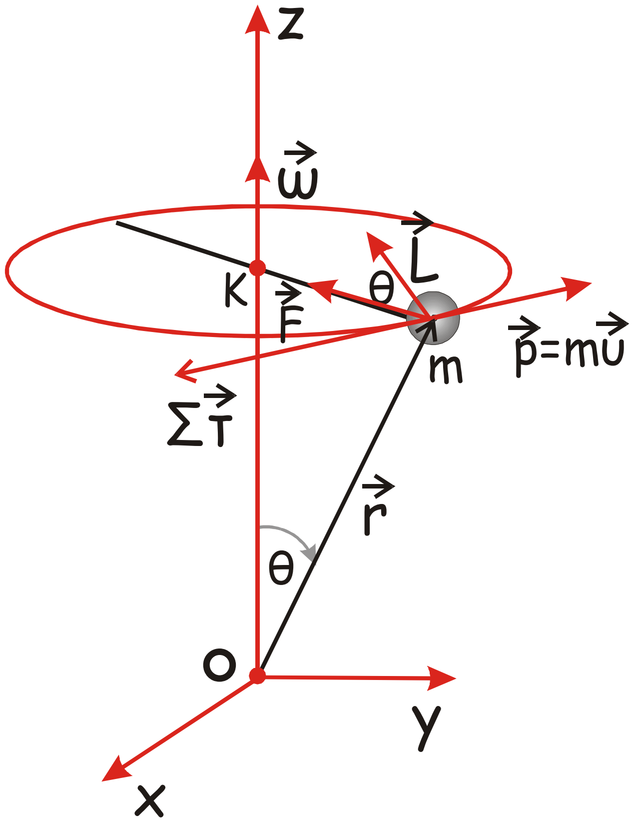
97. Στροφορμή και γωνιακή ταχύτητα.

Έστω ένα σωμάτιο μάζας m, που κινείται με ταχύτητα υ σε μια κυκλική τροχιά, γύρω από τον άξονα z ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Ο z διέρχεται από το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς. Τότε η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, βρίσκεται πάνω στον άξονα z με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Ακόμη η στροφορμή του σωματίου m, ως προς την αρχή Ο του αδρανειακού συστήματος αναφοράς είναι $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ με $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. Τότε με τον κανόνα του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι το $\vec{L}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των $\vec{r}$ και $\vec{p}$ με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Άρα το $\vec{L}$ δεν είναι συγγραμμικό με το $\vec{\omega}$.

Ακόμη παρατηρούμε πως αν το σημείο Ο έρθει και ταυτιστεί με το Κ που βρίσκεται στο επίπεδο περιστροφής του m τότε το $\vec{L}$ γίνεται παράλληλο με το $\vec{\omega}$.



Το μέτρο του $\vec{L}$ παραμένει σταθερό, όμως καθώς το σωμάτιο κινείται αλλάζει η κατεύθυνσή του. Για αυτό το λόγο έχουμε μια συνολική ροπή $\Sigma\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$.

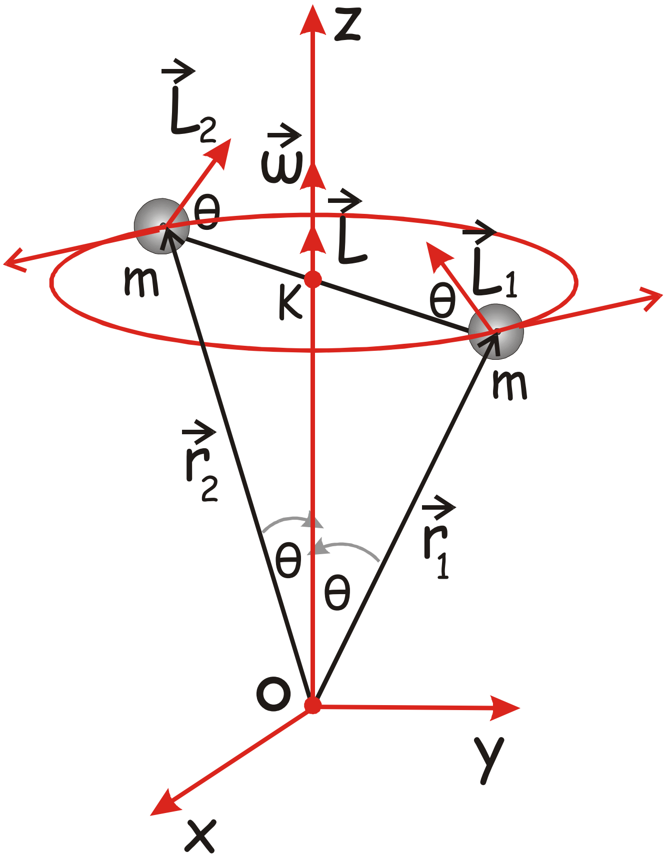
Πράγματι στο σώμα m ασκείται μια κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}$ ή οποία προκαλεί ως προς το σημείο Ο μια συνολική ροπή $\Sigma\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, η οποία είναι εφαπτόμενη στον κύκλο και κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\vec{L}$ και $\vec{\omega}$.

Η σχέση $\vec{L}$ =Ι$\vec{\omega}$ ισχύει μόνο αν τα $\vec{L}$ και $\vec{\omega}$ είναι παράλληλα που εδώ δεν είναι. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει $\vec{L}_z$=Ι·$\vec{\omega}$ και $\dfrac{d\vec{L}_z}{dt}$=Ι·$\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$.

Δηλαδή ενώ ισχύει η σχέση $\Sigma\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ δεν ισχύει η $\Sigma\vec{\tau}$ = Ι·$\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα και μια δεύτερη μάζα m που κινείται στην ίδια κυκλική τροχιά έτσι ώστε να βρίσκεται συνεχώς σε ένα αντιδιαμετρικό σημείο. Άρα έχει κάθε στιγμή το ίδιο μέτρο ταχύτητας με την αρχική μάζα m.

Τότε παρατηρούμε ότι η συνολική στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος των δυο μαζών βρίσκεται πάνω στον άξονα z (γιατί οι προβολές των στροφορμών κατά μήκος της διαμέτρου που ενώνει τις δυο μάζες έχουν συνισταμένη μηδέν) και άρα τα $\vec{L}$ και $\vec{\omega}$ είναι παράλληλα μεταξύ τους.



Τότε ισχύει $\vec{L}$ =I$\vec{\omega}$ και $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$=I$\cdot\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$.

Η σχέση $\Sigma\vec{\tau}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ ισχύει πάντα και άρα προκύπτει ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\Sigma\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt}=I\cdot\vec{a}_{\gamma\omega\nu}.$$

Αν επεκτείνουμε τώρα τη σκέψη μας σε ένα στερεό σώμα, τότε αν το σώμα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα περιστροφής, τότε για κάθε μια στοιχειώδη μάζα του σώματος υπάρχει και η αντιδιαμετρική της έτσι ώστε η συνολική στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος να βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής και να είναι παράλληλη με το $\vec{\omega}$. Αφού για όλα αυτά τα ζεύγη τα $\vec{L}$ και $\vec{\omega}$ είναι παράλληλα θα είναι και για κάθε τέτοιο συμμετρικό στερεό.

Άρα αν ένα στερεό είναι συμμετρικό ως προς έναν (σταθερό) άξονα περιστροφής τότε $\vec{L}$ και $\vec{\omega}$ είναι παράλληλα οπότε ισχύει $\vec{L}$ =I$\cdot\vec{\omega}$ και $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$=I$\cdot\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$ και ακόμη ισχύει $\Sigma\vec{\tau}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$=I$\cdot\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$.

Όμως αν πάρουμε την προβολή της $\vec{L}$ στον άξονα z τότε η σχέση $\vec{L}_z$=I$\cdot\vec{\omega}$ και η $\dfrac{d\vec{L}_z}{dt}$=I$\cdot\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$ ισχύει για οποιοδήποτε στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είτε είναι συμμετρικό είτε όχι.

Στην πραγματικότητα αποδεικνύεται ότι κάθε στερεό ανεξάρτητα από το αν είναι συμμετρικό ή όχι, έχει τρεις κάθετους άξονες που περνούν από το κέντρο μάζας του, γύρω από τους οποίους τα $\vec{L}$ και $\vec{\omega}$ είναι παράλληλα και συνδέονται τότε με τη σχέση $\vec{L}$ =I$\cdot\vec{\omega}$. Οι άξονες αυτοί ονομάζονται κύριοι άξονες (αδράνειας).

Αν ένα στερεό είναι συμμετρικό τότε οι κύριοι άξονες ταυτίζονται με τους άξονες συμμετρίας.

Συνοψίζοντας: Για κύριο άξονα (που περνάει από το κέντρο μάζας) ή για συμμετρικό στερεό, ισχύουν και $\vec{L}$ =I· $\vec{\omega}$ και $\Sigma\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ =I· $\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$.

Ενώ για ένα μη κύριο άξονα (ή μη συμμετρικό στερεό) ισχύει $\vec{L}_z$=I· $\vec{\omega}$ και $\frac{d\vec{L}_z}{dt}$ =I· $\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$ και $\Sigma\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$.

Δηλαδή ενώ ισχύει **πάντα** $\Sigma\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ η σχέση $\Sigma\vec{\tau}$ = I· $\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$ ισχύει μόνο για **κύριο άξονα** περιστροφής δηλαδή μόνο όταν τα $\vec{L}$ **και** $\vec{\omega}$ **είναι παράλληλα**.