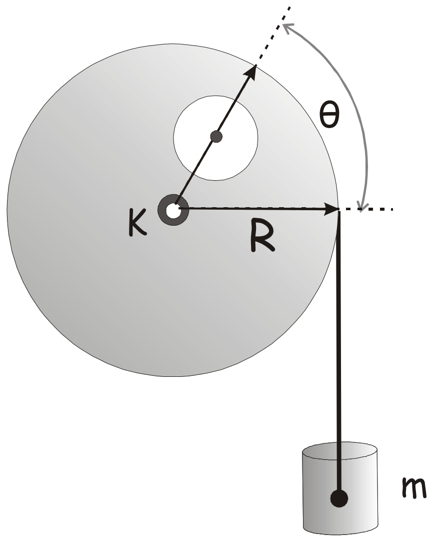
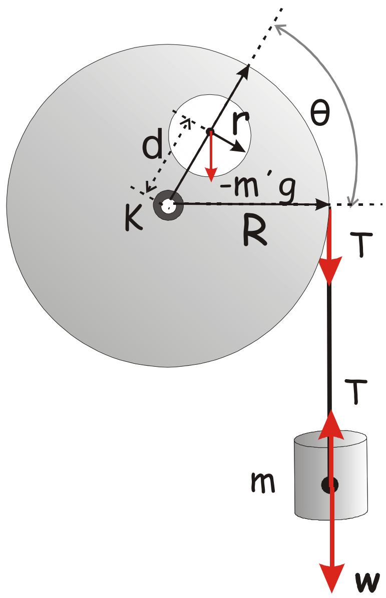
99. Ισορροπία και περιστροφή δίσκου με οπή



Σ΄ έναν επίπεδο συμπαγή δίσκος μάζας M και ακτίνας R κάνουμε μια κυκλική οπή ακτίνας r (r<R). Το κέντρο της οπής απέχει από το κέντρο του δίσκου απόσταση d με d<R.
Ο δίσκος με την οπή μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα, γύρω από έναν οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του K.
Ακόμη γύρω από το δίσκο υπάρχει αβαρές σχοινί στο ελεύθερο άκρο του οποίου κρεμάμε μια μάζα m.
α) Να υπολογίσετε τη μάζα m, ώστε ο δίσκος με την οπή να ισορροπεί σχηματίζοντας τη γωνία θ που φαίνεται στο σχήμα.
β) Αν αντικαταστήσουμε τη μάζα m, με μια άλλη $m_1=\frac{13}{160}$ Kg, τότε να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος m_1.

Δίνεται για το συμπαγή δίσκο $I_{cm}=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2$. Ακόμη M=3,2 Kg, R=40cm, r=10cm, d=20cm, $\theta=60^0$ και $g=10m/s^2$.

Συνοπτική λύση:



α) Αντιμετωπίζουμε την οπή σαν δίσκο «αρνητικής» μάζας. Οπότε η οπή προκαλεί μια ροπή ως προς το K ίση με $\tau_{w'}=-m'\cdot g\cdot d\cdot$συνθ, ενώ η ροπή της τάσης του σχοινιού ως προς το K θα είναι $\tau_T=T\cdot R$.
Τότε για την ισορροπία του δίσκου με την οπή θα έχουμε:

$\Sigma\tau_{(K)}=0$ ή $T\cdot R-m'\cdot g\cdot d\cdot$συνθ$=0\Rightarrow T=m'\cdot g\cdot\frac{d}{R}\cdot$συνθ.

Για την πυκνότητα του υλικού του δίσκου ισχύει $\rho=\frac{M}{\pi R^2}$ ή $M=\rho\pi R^2$. Ακόμη για τη μάζα της οπής που θεωρούμε ότι είναι από το ίδιο υλικό είναι $m'=\rho\pi r^2$.

Προκύπτει λοιπόν $\frac{m'}{M}=\frac{r^2}{R^2}$ ή $m'=\frac{r^2}{R^2}\cdot M$.

Τελικά έχουμε $T=M\cdot g\cdot\frac{d\cdot r^2}{R^3}\cdot$συνθ.

Ακόμη από την ισορροπία της μάζας m έχουμε $\Sigma F=0\Rightarrow T-w=0\Rightarrow T=w=mg\Rightarrow$

$\Rightarrow M\cdot g\cdot\frac{d\cdot r^2}{R^3}\cdot$συνθ$=mg\Rightarrow m=M\cdot\frac{d\cdot r^2}{R^3}\cdot$συνθ.

Με αντικατάσταση των τιμών βρίσκουμε $m=3,2\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow m=\frac{1}{20}$ Kg ή m=50g.

β) Αντιμετωπίζουμε όπως είπαμε την οπή σαν δίσκο «αρνητικής» μάζας.

Για το συμπαγή δίσκο έχουμε $I_1=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2$.

Η οπή δεν περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της. Έτσι θα πρέπει να πάρουμε το θεώρημα των παράλληλων αξόνων (Steiner).

Τότε για τη ροπή αδράνειας της κυκλικής οπής ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του δίσκου έχουμε $I_2=\frac{1}{2}\cdot m'\cdot r^2+m'\cdot d^2$.

Όμως ισχύει $m'=\frac{r^2}{R^2}\cdot M$. Με αντικατάσταση των τιμών προκύπτει $m'=\frac{3,2}{16}$Kg ή $m'=\frac{3,2}{16}$Kg=0,2 Kg. Έτσι έχουμε $I_2=M\cdot\frac{r^2}{R^2}\cdot(\frac{r^2}{2}+d^2)$.

Τελικά για τη ροπή αδράνειας του δίσκου με την οπή γύρω από άξονα περιστροφής που περνάει από το κέντρο του δίσκου έχουμε,

$I=I_1-I_2=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2-M\cdot\frac{r^2}{R^2}\cdot(\frac{r^2}{2}+d^2)$ ή $I=\frac{1}{2}\cdot M\cdot[R^2-\frac{r^2}{R^2}(r^2+2d^2)]$.

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε $I=\frac{1}{2}\cdot 3{,}2\cdot[16\cdot 10^{-2}-\frac{1}{16}\cdot(10^{-2}+8\cdot 10^{-2})]\Rightarrow$

$\Rightarrow I=16\cdot 10^{-3}\cdot(16-\frac{9}{16})\Rightarrow I=247\cdot 10^{-3}$ $Kg\cdot m^2$.

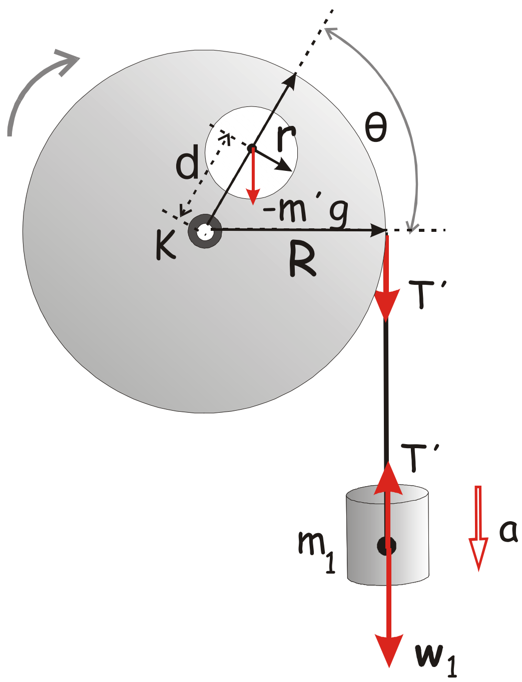
Για τη μεταφορική κίνηση της μάζας m_1 ισχύει:

$\Sigma F=m_1\cdot\alpha\Rightarrow m_1\cdot g-T'=m_1\cdot\alpha$ (1)

Για τη στροφική κίνηση του δίσκου με την οπή ισχύει:

$\Sigma\tau_{(K)}=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow T'\cdot R-m'\cdot g\cdot d\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=I\cdot\frac{\alpha}{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow T'-m'\cdot g\cdot\frac{d}{R}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=I\cdot\frac{\alpha}{R^2}$ (2).



Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) ∧(2) και έχουμε

$m_1\cdot g-m'\cdot g\cdot\frac{d}{R}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=I\cdot\frac{\alpha}{R^2}+m_1\cdot\alpha\Rightarrow$

$\Rightarrow g(m_1-m'\cdot\frac{d}{R}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta)=\alpha\cdot(I\cdot\frac{1}{R^2}+m_1)$.

Με αντικατάσταση έχουμε ,

$10(\frac{1,3}{16}-\frac{3,2}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta)=\alpha\cdot(247\cdot 10^{-3}\cdot\frac{100}{16}+\frac{1,3}{16})\Rightarrow$

$\Rightarrow 13-16\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=(24{,}7+1{,}3)\cdot\alpha\Rightarrow$

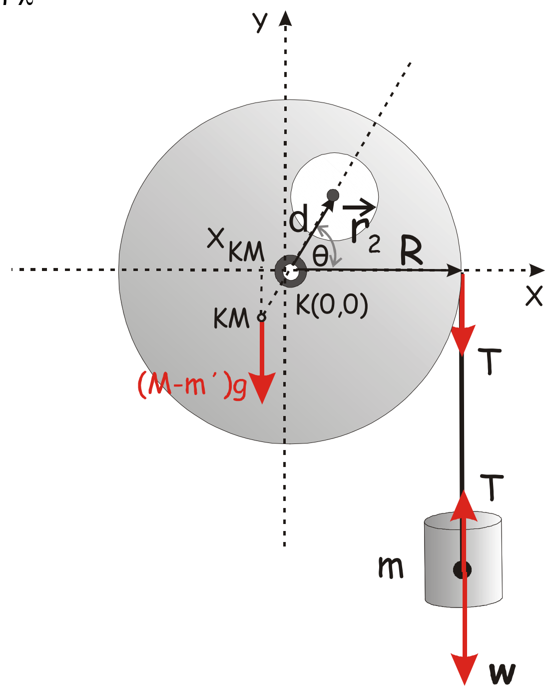
$\Rightarrow 13-16\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=(24{,}7+1{,}3)\cdot\alpha\Rightarrow 26\cdot\alpha=13-16\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow$

$\Rightarrow\alpha=0{,}5-\frac{8}{13}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$.

Β΄ Τρόπος

Κέντρο μάζας – αφαιρετική μέθοδος.

α) Μπορούμε να υπολογίσουμε το ΚΜ του αρχικού δίσκου και το ΚΜ του αποκομμένου τμήματος και να τα προσθέσουμε.



Θεωρούμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο Κ(0,0).
Τότε το διάνυσμα θέσης του ΚΜ του αρχικού δίσκου είναι $\vec r_1=0\,\hat x+0\,\hat y=\vec 0$. Ακόμη το διάνυσμα θέσης του ΚΜ του αποκομμένου τμήματος είναι, $\vec r_2=d\cdot$συνθ$\,\hat x+d\cdot$ημθ$\,\hat y$. Ακόμη η μάζα του αρχικού δίσκου είναι $M=\rho\pi R^2$ και του αποκομμένου τμήματος είναι $m'=-\rho\pi r^2$ άρα ισχύει $m'=-\dfrac{r^2}{R^2}\cdot M$.
Τότε το διάνυσμα θέσης του Κ.Μ του δίσκου με την οπή είναι,

$$\vec r_{K.M}=\frac{1}{M_{o\lambda}}(M\cdot\vec r_1+m'\vec r_2)=\frac{1}{M-m'}(M\cdot\cancelto{0}{\vec r_1}+m'\vec r_2)$$

ή

$$\vec r_{K.M}=\frac{1}{M-m'}(m'\vec r_2)\Rightarrow\vec r_{K.M}=\frac{1}{M-m'}(m'\cdot d\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\,\hat x+m'\cdot d\cdot\eta\mu\theta\,\hat y)\Rightarrow$$

$\vec r_{K.M}=\dfrac{m'}{M-m'}\cdot d\,(\sigma\upsilon\nu\theta\,\hat x+\eta\mu\theta\,\hat y)$ και επειδή είναι $m'=-\dfrac{r^2}{R^2}\cdot M$ προκύπτει

$$\vec r_{K.M}=-\frac{r^2}{R^2-r^2}\cdot d\,(\sigma\upsilon\nu\theta\,\hat x+\eta\mu\theta\,\hat y)\Rightarrow\vec r_{K.M}=-\frac{r^2}{R^2-r^2}\cdot d\,\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\hat x-\frac{r^2}{R^2-r^2}\cdot d\,\eta\mu\theta\cdot\hat y\,.$$

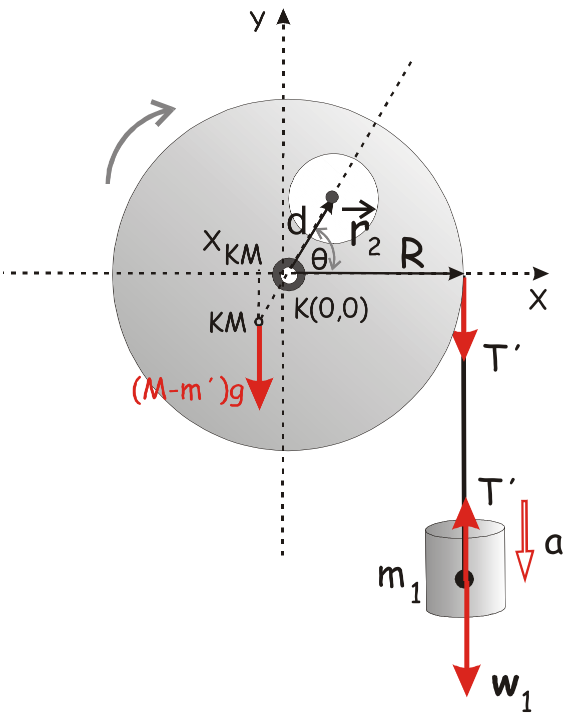
Τότε οι συντεταγμένες του Κ.Μ που ψάχνουμε είναι

$(x_{KM}, y_{KM})=\left(-\dfrac{r^2}{R^2-r^2}\cdot d\sigma\upsilon\nu\theta,\ -\dfrac{r^2}{R^2-r^2}\cdot d\eta\mu\theta\right)$ με αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών έχουμε $(x_{KM}, y_{KM})=\left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2\sqrt3}{3}\right)$ cm.

Τότε για την ισορροπία του δίσκου με την οπή θα έχουμε:
$\Sigma\tau_{(K)}=0$ ή $T\cdot R-(M-m')\cdot g\cdot|x_{KM}|=0$ και επειδή ισχύει $T=mg$ προκύπτει

$$mg\cdot R=(M-m')\cdot g\cdot\frac{r^2}{R^2-r^2}\cdot d\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow m=M\cdot\frac{d\cdot r^2}{R^3}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

που είναι η ίδια λύση που βρήκαμε και προηγουμένως.



β) Για τη μεταφορική κίνηση της μάζας m_1 ισχύει:

$\Sigma F=m_1\cdot\alpha \Rightarrow m_1\cdot g-T'=m_1\cdot\alpha$ (1)

Για τη στροφική κίνηση του δίσκου με την οπή ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(K)}=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T'\cdot R-(M-m')\cdot g\cdot|x_{KM}|=I\cdot\frac{\alpha}{R}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T'\cdot R-(M-m')\cdot g\cdot\frac{r^2}{R^2-r^2}\,d\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=I\cdot\frac{\alpha}{R}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T'-(M-m')\cdot g\cdot\frac{r^2}{R^2-r^2}\cdot\frac{d}{R}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=I\cdot\frac{\alpha}{R^2}\quad(2).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) $\wedge$(2) και έχουμε,

$$m_1\cdot g-(M-m')\cdot g\cdot\frac{r^2}{R^2-r^2}\cdot\frac{d}{R}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=(I\cdot\frac{1}{R^2}+m_1)\cdot\alpha$$

Με αντικατάσταση έχουμε ,

$$\frac{13}{16}-30\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{2}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=(247\cdot10^{-3}\cdot\frac{100}{16}+\frac{1,3}{16})\cdot\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{13}{16}-\sigma\upsilon\nu\theta=(\frac{24,7}{16}+\frac{1,3}{16})\cdot\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13-16\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=(24,7+1,3)\cdot\alpha\Rightarrow 26\cdot\alpha=13-16\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow\alpha=0,5-\frac{8}{13}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta.$$