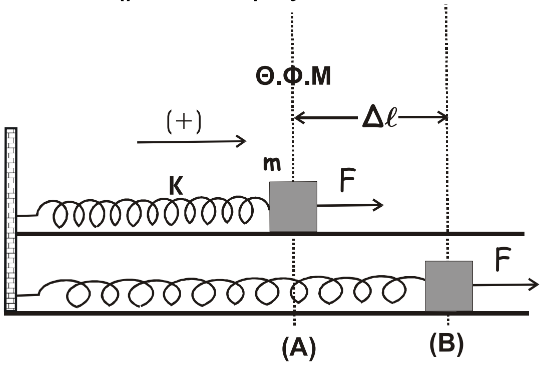
ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Ένα σώμα μάζας m=1Kg ισορροπεί δεμένο σε ελατήριο σταθεράς K=100N/m πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή εξασκούμε στο σώμα μια σταθερή δύναμη F=20 N και με φορά προς τα δεξιά, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν το ελατήριο επιμηκυνθεί μέγιστα κατά $\Delta\ell$=0,4m από τη Θ.Φ.Μ καταργούμε τη δύναμη F.



Μόλις πάψει να εξασκείται η δύναμη (t=0) το σύστημα πραγματοποιεί α.α.τ.

α) Να υπολογίσετε την ενέργεια της ταλάντωσης.

β) Να υπολογίσετε την προσφερόμενη ενέργεια μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης F και μέχρι το σώμα να επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$, καθώς και το έργο της δύναμης του ελατηρίου. Να υπολογίσετε τότε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης.

γ) Να γράψετε τις εξισώσεις x(t) και υ(t) της α.α.τ που πραγματοποιεί το σώμα μόλις καταργήσουμε τη δύναμη F.

δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μάζας m, καθώς και το ρυθμό μεταβολής της ορμής της τη χρονική στιγμή $t=\frac{\pi}{40}$ s.

ε) Όταν ακόμη ασκούμε τη δύναμη F, να υπολογίσετε την ταχύτητα της μάζας m, τη στιγμή που x= $\Delta\ell/2$ από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

στ) Αν καταργήσουμε την εξωτερική δύναμη F, τη στιγμή που η μάζα m, έχει μετατοπιστεί κατά $x=x_1=\Delta\ell/2$ από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, τότε πόση είναι η προσφερόμενη ενέργεια στο σύστημα από τη δύναμη F και ποια είναι η ενέργεια της καινούργιας ταλάντωσης; Ακόμη να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης και την κινητική ενέργεια του σώματος m, εκείνη τη στιγμή. Τι παρατηρείτε;

ζ) Αν δεν καταργήσουμε τη δύναμη F, τότε να δείξετε ότι το σώμα πραγματοποιεί α.α.τ και να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης x(t) που πραγματοποιεί.

Θεωρείστε την προς τα δεξιά φορά θετική.

Λύση:

α) Επειδή η $\Delta\ell$ είναι η μέγιστη απομάκρυνση από τη Θ.Φ.Μ του ελατηρίου που εδώ ταυτίζεται και με τη Θ.Ι. ταλάντωσης ισχύει $\Delta\ell$=Α=0,4m οπότε για την ενέργεια ταλάντωσης της μάζας m, έχουμε $E=\frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2 \Rightarrow$ **E=8J**.

β) Το έργο της εξωτερικής δύναμης F είναι, $W=F\cdot\Delta\ell \Rightarrow W=20\cdot 0,4=8J$ και είναι ίσο με την προσφερόμενη ενέργεια $E_{\pi\rho}$. Η ενέργεια που προσφέραμε μέσω του W μετατράπηκε σε ενέργεια ταλάντωσης. Άρα ισχύει $E_{\pi\rho}=W_F=E=8J$

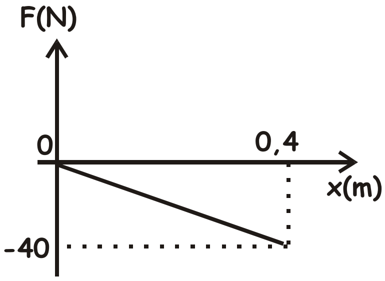
Παρατηρούμε ότι η ενέργεια ταλάντωσης Ε είναι ίση με το έργο της εξωτερικής δύναμης F που ασκήσαμε στο σώμα για να το θέσουμε σε ταλάντωση και μέχρι να καταργήσουμε τη δύναμη F.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου για επιμήκυνση $x=\Delta\ell=0,4m$ είναι $U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}\cdot K\cdot \Delta\ell^{\,2} \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda}=8J$. Επειδή βέβαια έχουμε οριζόντιο ελατήριο η Θ.Φ.Μ του ελατηρίου και η Θ.Ι.Τ της μάζας m, ταυτίζονται οπότε η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του σώματος (U), είναι όση και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου άρα $U=U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}\cdot K\cdot \Delta\ell^{\,2} \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda}=8J$.

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι $W_{F\varepsilon\lambda}=U_{\alpha\rho\chi}-U_{\tau\varepsilon\lambda}=0-\frac{1}{2}\cdot K\cdot \Delta\ell^{\,2} \Rightarrow$

$\Rightarrow W_{F\varepsilon\lambda}=-U_{\varepsilon\lambda}=-8J$. Παρατηρούμε ότι το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι αριθμητικά ίσο με τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

Βέβαια το έργο της μεταβλητής δύναμης του ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}=-K\cdot x=-100\cdot x$ μπορούμε να το υπολογίσουμε και με γραφική παράσταση οπότε έχουμε, για x=0 είναι F=0N και για $x=\Delta\ell=A=0,4m$ είναι F=-40N. Η γραφική παράσταση είναι η διπλανή. Το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίστηκε είναι ίσο με το έργο της δύναμης του ελατηρίου, άρα $W_{F\varepsilon\lambda}=\frac{0,4(-40)}{2} \Rightarrow W_{F\varepsilon\lambda}=-8J$.



γ) Για t=0 είναι x=+A αφού η προς τα δεξιά φορά είναι η θετική. Οπότε από τη γενική εξίσωση της α.α.τ: $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ προκύπτει $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ rad. Ακόμη είναι $D=K=m\omega^2 \Rightarrow \omega=10rad/s$. Τελικά για την εξίσωση της α.α.τ θα έχουμε $x=0,4\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2})$ (S.I).

Για την ταχύτητα της ταλάντωσης έχουμε $\upsilon=4\sigma\upsilon\nu(10t+\frac{\pi}{2})$ (S.I).

δ) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μάζας m, ισχύει,

$\frac{\Delta K}{\Delta t}=-D\cdot x\cdot \upsilon \Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t}=-D\cdot A\cdot \eta\mu\varphi\cdot\omega\cdot A\cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$ με $(\varphi=\omega t+\varphi_0)$ άρα

$\frac{\Delta K}{\Delta t}$=-$\frac{DA^2\omega}{2}$·2 ημφ·συνφ ⇒ $\frac{\Delta K}{\Delta t}$=-Ε·ω·ημ2φ με Ε=$\frac{DA^2}{2}$=8J.

Άρα προκύπτει $\frac{\Delta K}{\Delta t}$= -80·ημ(2ωt+2$\varphi_0$)⇒ $\frac{\Delta K}{\Delta t}$= -80·ημ(20t+π).

Τότε για t=$\frac{\pi}{40}$ s έχουμε, $\frac{\Delta K}{\Delta t}$= -80·ημ(20·$\frac{\pi}{40}$+π)⇒ $\frac{\Delta K}{\Delta t}$= -80·ημ($\frac{3\pi}{2}$)⇒

⇒$\frac{\Delta K}{\Delta t}$= -80·ημ(-$\frac{\pi}{2}$)⇒$\frac{\Delta K}{\Delta t}$= 80J/s.

Αλλιώς,

μπορούμε για t=$\frac{\pi}{40}$ s να υπολογίσουμε την απομάκρυνση x του σώματος, οπότε έχουμε, x=0,4ημ(10t+$\frac{\pi}{2}$)⇒ x=0,4ημ(10·$\frac{\pi}{40}$ + $\frac{\pi}{2}$)⇒

⇒ x=0,4·ημ($\frac{3\pi}{4}$)⇒x=0,4ημ($\frac{\pi}{4}$)⇒x=0,4·$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⇒ x=0,2·$\sqrt{2}$ m

και την ταχύτητα ταλάντωσης,

υ=4·συν(10t+$\frac{\pi}{2}$)⇒ υ=4·συν($\frac{3\pi}{4}$)⇒υ=4·συν(-$\frac{\pi}{4}$)⇒υ=-4·$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⇒ υ=-2·$\sqrt{2}$ m/s.

Τελικά έχουμε, $\frac{\Delta K}{\Delta t}$=-Κ·x·υ⇒$\frac{\Delta K}{\Delta t}$=-100·0,2·$\sqrt{2}$ ·(-2·$\sqrt{2}$)⇒$\frac{\Delta K}{\Delta t}$=80J/s.

Για το ρυθμό μεταβολής της ορμής εκείνη τη στιγμή έχουμε $\frac{\Delta p}{\Delta t}$=ΣF=-D·x=-K·x, για t=$\frac{\pi}{40}$ s είναι x=0,2·$\sqrt{2}$ m και $\frac{\Delta p}{\Delta t}$=-100·0,2·$\sqrt{2}$ ή $\frac{\Delta p}{\Delta t}$=-20·$\sqrt{2}$ Kgm/s^2.

ε) Από το Θ.Μ.Κ.Ε έχουμε $K_{τελ}$-$K_{αρχ}$= W_F+ $W_{Fελ}$⇒$K_{τελ}$=W_F+ $U_{αρχ}$ -$U_{τελ}$⇒

⇒$K_{τελ}$=W_F- $U_{τελ}$⇒$K_{τελ}$= F·x_1-$\frac{1}{2}$·K· x_1^2⇒ $K_{τελ}$=4-2=2J. Άρα είναι

$K_{τελ}$=$\frac{1}{2}$·m·$υ^2$⇒2=$\frac{1}{2}$·$υ^2$⇒υ=2m/s.

Όταν όμως πάψει να ασκείται η δύναμη F και ακολουθήσει η α.α.τ με x=0,4ημ(10t+$\frac{\pi}{2}$) από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση και για x=x_1 προκύπτει ότι,

K+U=E⇒K=8-2⇒K=6J, οπότε K=$\frac{1}{2}$·m·$υ^2$⇒6=$\frac{1}{2}$·$υ^2$⇒υ=$\sqrt{12}$ m/s ή υ=2·$\sqrt{3}$ m/s.

στ) Αν η δύναμη F καταργηθεί όταν x=x_1=0,2m, τότε η προσφερόμενη ενέργεια είναι $E_{πρ}$=W_F=F·x_1=20·0,2=4J. Τόση βέβαια θα είναι τότε και η ενέργεια Ε της ταλάντωσης άρα Ε=$E_{πρ}$=W_F=4J (**Ε=4J**). Εκείνη τη στιγμή η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι όση και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου άρα U=$U_{ελ}$=$\frac{1}{2}$·K· x_1^2⇒ $U_{ελ}$=2J.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε έχουμε $K_{τελ}$-$K_{αρχ}$= W_F+ $W_{Fελ}$⇒$K_{τελ}$=W_F+ $U_{αρχ}$ -$U_{τελ}$⇒

⇒$K_{τελ}$=W_F- $U_{τελ}$⇒ $K_{τελ}$=W_F -$\frac{1}{2}$·K· x_1^2⇒ $K_{τελ}$=4-2=2J.

*Παρατηρούμε ότι το W_F μέχρι τη στιγμή που **παύει** να ασκείται η δύναμη F, είναι πάντα ίσο με την ενέργεια Ε της ταλάντωσης, δηλαδή $W_F = E$. Αν βέβαια η δύναμη καταργείται στη μέγιστη απομάκρυνση ($x= x_{max}$) είναι και $W_F = U_{ελ(max)}=U_{(max)}$ αλλιώς είναι $W_F = K+ U_{ελ}= K+U$ σε εκείνη τη θέση.*
Γενικά: Για τη μέγιστη απομάκρυνση x_{max} και για σταθερή δύναμη F ισχύει,
Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{τελ}-K_{αρχ}= W_F+ W_{Fελ} \Rightarrow 0=W_F+ U_{αρχ} -U_{τελ} \Rightarrow 0=F\cdot x_{max} - \frac{1}{2}\cdot K\cdot x^2_{max} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{max} = \frac{2F}{K}.$$

Τότε έχουμε $E=\frac{1}{2}\cdot K\cdot A'^2 \Rightarrow A'=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{10}=0{,}2\cdot\sqrt{2}$ m.
Επίσης τη στιγμή που καταργούμε τη δύναμη F (θεωρούμε t=0) είναι $x=x_1=0{,}2$m, οπότε από τη γενική εξίσωση της α.α.τ: $x=A'ημ(ωt+φ_0)$ προκύπτει

$x_1=A'ημ(ω\cdot 0+φ_0) \Rightarrow$ $0{,}2=0{,}2\cdot\sqrt{2}\,ημφ_0 \Rightarrow$ $ημφ_0=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ $ημφ_0=ημ\frac{π}{4}$, και έχουμε $φ_0=2κπ+\frac{π}{4}$ με υ>0 ή $φ_0=2κπ+\frac{3π}{4}$ με υ<0 ($κ\in Z^+$). Όμως από την εκφώνηση είναι υ>0, οπότε κάνουμε δεκτή την πρώτη γενική λύση που για κ=0 μας δίνει $φ_0=\frac{π}{4}$ rad, ($0\leq φ_0<2π$ rad).
Επίσης παρατηρούμε ότι η σταθερά D της ταλάντωσης εξακολουθεί να είναι D=K=100N/m και $D=K=mω^2 \Rightarrow ω=10$rad/s.Τελικά για την εξίσωση της α.α.τ θα έχουμε, $x=0{,}2\cdot\sqrt{2}\,ημ(10t+\frac{π}{4})$ (S.I).

ζ) Όταν εξασκούμε συνεχώς τη δύναμη F τότε στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης Θ.Ι.Τ (που εδώ δεν ταυτίζεται με τη Θ.Φ.Μ του ελατηρίου), ισχύει

$ΣF=0 \Rightarrow F=F_{ελ} \Rightarrow F \Rightarrow Kx_1 \Rightarrow x_1=\frac{20}{100}=0{,}2$m ή 20cm.
Τότε όμως το πλάτος Α της ταλάντωσης θα είναι $A=x_1=20$cm ή 0,2m.

Στην τυχαία θέση, έστω δεξιά από τη Θ.Ι.Τ ισχύει $ΣF= F-K\cdot(x_1+x) \Rightarrow$
$\Rightarrow ΣF= F-K\cdot x_1-K\cdot x \Rightarrow ΣF=-K\cdot x$ που είναι μια εξίσωση της μορφής ΣF=-Dx, άρα πράγματι το σύστημά μας πραγματοποιεί α.α.τ με D=K=100N/m.

Ακόμη για t=0 είναι x=-A αφού η προς τα δεξιά φορά είναι η θετική. Οπότε από τη γενική εξίσωση της α.α.τ: $x=Aημ(ωt+φ_0)$ προκύπτει $φ_0=\frac{3π}{2}$ rad. Ακόμη είναι $D=K=mω^2 \Rightarrow ω=10$rad/s. Τελικά για την εξίσωση της α.α.τ θα έχουμε
$x=0{,}2\cdot ημ(10t+\frac{3π}{2})$ (S.I) με ενέργεια ταλάντωσης Ε ίση με, $E=\frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2$ ή **E=2J**.