Lagrange και α.α.τ

Σώμα μάζας m πραγματοποιεί α.α.τ με σταθερά επαναφοράς D. Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος.

Λύση:

Ξεκινάμε να βρούμε τους βαθμούς ελευθερίας, εδώ έχουμε 1 β.ε. Διαλέγουμε ως γενικευμένη συντεταγμένη $q_i=x$, και στη συνέχεια κατασκευάζουμε τη συνάρτηση Lagrange για την οποία ισχύει L=T-V με $T=\frac{1}{2}\cdot m\cdot \dot{x}^2$.

Ακόμη $F=-\nabla V$, όπου $F=F_{\varepsilon\pi}= -D\cdot x$ και $V=\frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2$ οπότε πράγματι

$-\nabla V=-\frac{\partial V}{\partial x}=-D\cdot x =F$.

Άρα για συνάρτηση Lagrange έχουμε $L=T-V\Rightarrow L=\frac{1}{2}\cdot m\cdot \dot{x}^2-\frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2$, και για την εξίσωση Lagrange προκύπτει $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})-\frac{\partial L}{\partial x}=0$, όπου $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\cdot \dot{x}$ και $\frac{\partial L}{\partial x}=-D\cdot x$.

Τελικά $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})-\frac{\partial L}{\partial x}=0\Rightarrow \frac{d}{dt}(m\cdot \dot{x})+D\cdot x=0\Rightarrow m\cdot \ddot{x}+D\cdot x=0\Rightarrow \ddot{x}=-\frac{D}{m}\cdot x$ που είναι η επιτάχυνση του σώματος, όπως ακριβώς τη βρίσκουμε και με τη Νευτώνεια μηχανική.