

Μια εξίσωση 3 φαινόμενα

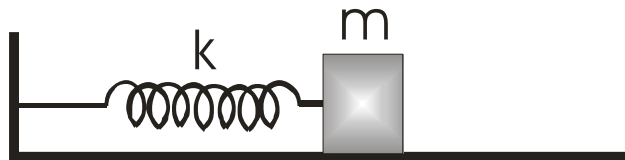
$$\Psi'' + K^2 \cdot \Psi = 0$$

Γενικά η παραπάνω εξίσωση έχει λύση και την $\Psi(x) = A \eta \mu Kx$ ή $\Psi(t) = A \eta \mu Kt$ κ.λπ.

Αν $\Psi = x(t)$

Μηχανική ταλάντωση

✓ γνωρίζουμε πως ια-
νή και αναγκαία συνθήκη
για να πραγματοποιεί ένα
σώμα Α.Α.Τ, είναι να ισχύ-
ει $F = -D \cdot x$ ή $m \cdot a = -D \cdot x$ ή



$m \cdot a + D \cdot x = 0$ ή $m \frac{\Delta v}{\Delta t} + D \cdot x = 0$. Όμως $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ άρα $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}$ ή

$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = x''$, οπότε έχουμε:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + D \cdot x = 0 \text{ ή } m \cdot x'' + D \cdot x = 0 \quad (1)$$

η παραπάνω εξίσωση έχει τη μορφή

$$\Psi'' + K^2 \cdot \Psi = 0$$

με λύση $\Psi = A \eta \mu Kt$ με $K^2 = \frac{D}{m}$ ή $K = \sqrt{\frac{D}{m}} = \omega$

οπότε έχουμε $x(t) = A \cdot \eta \mu \omega t$

Αν $\Psi=q(t)$

Ηλεκτρική ταλάντωση

✓ Στις ηλεκτρικές ισχύει κάτι παρόμοιο με τις μηχανικές ταλαντώσεις.

Έστω το κύκλωμα των αμείωτων ηλεκτρικών ταλαντώσεων του σχήματος. Τότε κάθε χρονική στιγμή ισχύει $V_c = V_L$ όμως

$$V_L = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \text{ άρα } \frac{1}{C} \cdot q = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \text{ ή}$$

$$\frac{1}{C} \cdot q + L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0. \text{ Όμως } I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \text{ Τότε}$$

όμως είναι

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} \left(\frac{\Delta q}{\Delta t} \right) = \frac{\Delta^2 q}{\Delta t^2}, \text{ οπότε έχουμε:}$$

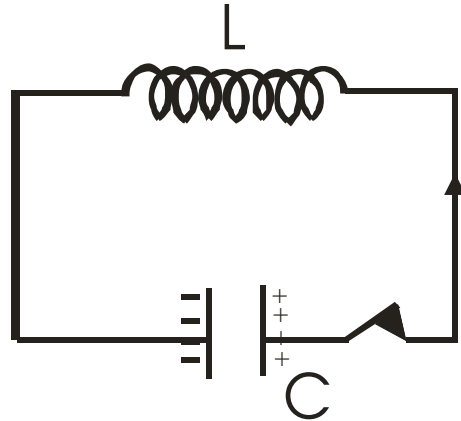
$$L \cdot \frac{\Delta^2 q}{\Delta t^2} + \frac{1}{C} \cdot q = 0. \text{ ή } L \cdot q'' + \frac{1}{C} \cdot q = 0 \quad (2)$$

Η διαφορική εξίσωση (2), έχει τη μορφή

$$\Psi'' + K^2 \cdot \Psi = 0$$

με λύση $\Psi = A \eta \mu K t$ με $K^2 = \frac{1}{LC}$ ή $K = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega$ και $A = Q$

οπότε έχουμε $q(t) = Q \cdot \eta \mu \omega t$



Αν η Ψ είναι συνάρτηση της θέσης x και όχι του χρόνου t , τότε

$$\text{Αν } \Psi = \Psi(x)$$

Κυματοσυνάρτηση υλικού σωματιδίου

✓ Η εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο κύματος είναι της μορφής $\Psi = A \cdot \eta\mu \frac{2\pi x}{\lambda} = A \cdot \eta\mu kx$ όπου $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (κυματαριθμός).

Βέβαια η λύση δεν περιέχει χρόνο αλλά δεν πειράζει είναι της μορφής $\Psi = A \eta\mu Kx$.

Άρα είναι λογικό να υποθέσουμε ότι και αυτή η λύση προέρχεται από μια δ.ε της μορφής $\Psi'' + K^2 \cdot \Psi = 0$ με $\Psi = \Psi(x)$

Αν τώρα "αυθαίρετα" θεωρήσουμε ότι και τα υλικά κύματα που αναφέρονται στη κυματική φύση των υλικών σωματιδίων π.χ ηλεκτρονίων έχουν τη μορφή του στιγμιότυπου ενός κλασσικού κύματος, τότε και η δ.ε εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο ενός μονοδιάστατου υλικού κύματος είναι και αυτή της μορφής

$$\Psi'' + K^2 \cdot \Psi = 0$$

Όμως η ενέργεια ενός υλικού κύματος για ένα σωματίδιο π.χ ηλεκτρόνιο είναι $E = hf = \hbar \cdot \omega$ και η ορμή του $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar \cdot k$, οπότε είναι

$$k = \frac{p}{\hbar} \text{ και } k^2 = \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2$$

Τότε αν θέσουμε $K^2 = \frac{p^2}{\hbar^2}$ έχουμε

$$\Psi'' + K^2 \cdot \Psi = 0 \Rightarrow \Psi'' + \frac{p^2}{\hbar^2} \cdot \Psi = 0 \text{ με } \Psi = A \cdot \eta\mu kx \text{ για ελεύθερο σωματίδιο.}$$

ο.

Έστω ακόμη ότι το ηλεκτρονιάκι μας είναι δεσμευμένο (υπόκειται σε κάποιο πεδίο δυνάμεων), όπως αυτό του πυρήνα του ατόμου ενός χημικού στοιχείου, τότε θα έχει κινητική και δυναμική ενέργεια. Για την ολική του ενέργεια λοιπόν έχουμε $E = K + U \Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \frac{p^2}{2m} + U(x) \Rightarrow p^2 = 2m(E - U). \text{ Τότε η δ.ε εξίσωση που περιγράφει}$$

την κυματική φύση του ηλεκτρονίου γίνεται,

$$\Psi'' + \frac{p^2}{\hbar^2} \cdot \Psi = 0 \Rightarrow \Psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0$$

που είναι και η μονοδιάστατη χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger που αναφέρεται στην κυματική μορφή - φύση, ενός σωματιδίου δεδομένης ενέργειας.

Για 3-διάστατο κύμα έχουμε $\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x,y,z)) \cdot \Psi = 0$ όπου $\Psi(x,y,z)$ είναι η κυματοσυνάρτηση ή συνάρτηση του υλικού κύματος π.χ ενός ηλεκτρονίου.

Άρα η μηχανική ταλάντωση η ηλεκτρική ταλάντωση αλλά και η χωρική ταλάντωση (κυματική υπόσταση) ενός π.χ ηλεκτρονίου περιγράφονται από την ίδια εξίσωση: $\Psi'' + K^2 \cdot \Psi = 0$