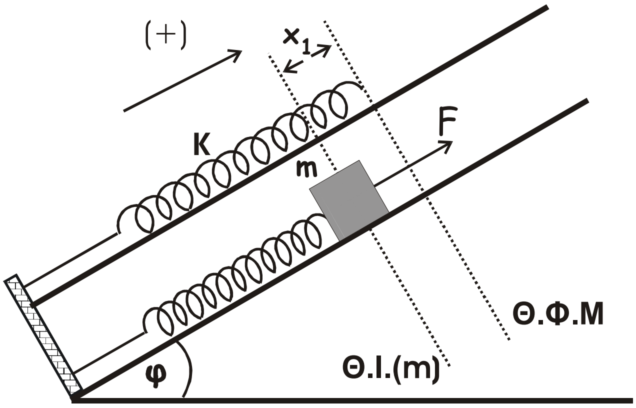
ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Ένα σώμα μάζας m=4Kg ισορροπεί δεμένο σε ελατήριο σταθεράς K=400N/m πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi=30^0$. Τη χρονική στιγμή t=0 εξασκούμε στο σώμα μια σταθερή δύναμη F=80N με φορά προς τα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα πραγματοποιεί α.α.τ,

β) Να γράψετε την εξίσωση x(t) της α.α.τ, καθώς και τη χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς ΣF(t).

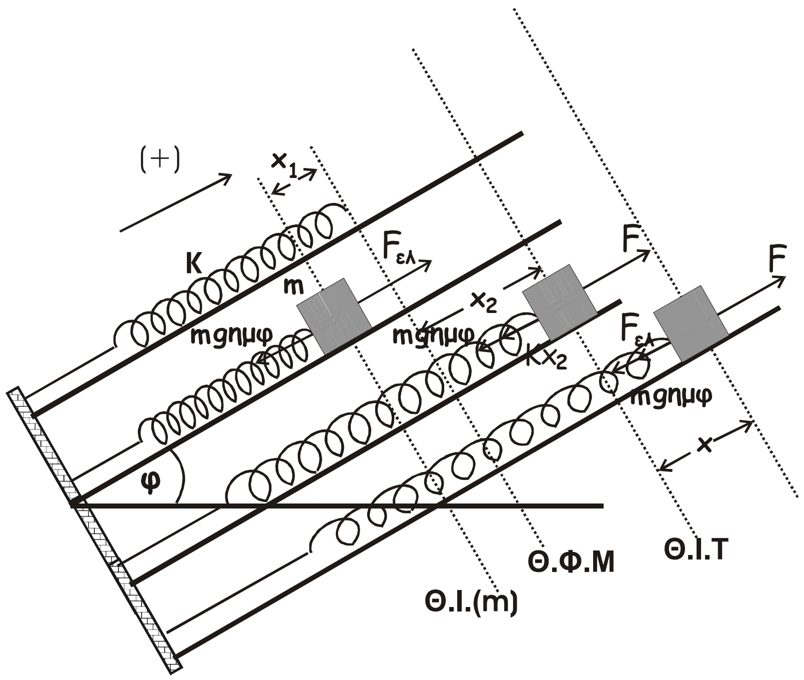
γ) Να γράψετε την εξίσωση d(t) της απομάκρυνσης d του σώματος από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο t, καθώς και τη χρονική εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου $F_{ελ}(t)$.

δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μάζας m, τη χρονική στιγμή $t=\frac{\pi}{40}$ s.

Να θεωρήσετε την προς τα πάνω φορά θετική. Δίνεται $g=10m/s^2$

Λύση:

α) Στη θέση ισορροπίας της μάζας m και πριν εξασκήσουμε τη δύναμη F, ισχύει $\Sigma F=0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=mg\eta\mu\varphi \Rightarrow Kx_1=mg\eta\mu 30^0 \Rightarrow$



$\Rightarrow x_1=\dfrac{20}{400}=0{,}05$m ή 5cm. Στη θέση ισορροπίας ταλάντωσης της μάζας m θα πρέπει να ισχύει $\Sigma F=0 \Rightarrow F=mg\eta\mu 30^0+Kx_2 \Rightarrow x_2=\dfrac{60}{400} \Rightarrow x_2=0{,}15$m ή 15cm.

Στην τυχαία θέση ισχύει $\Sigma F= F-mg\eta\mu 30^0-K(x_2+x) \Rightarrow \Sigma F= F-mg\eta\mu 30^0-Kx_2-Kx \Rightarrow$
$\Rightarrow \Sigma F=-Kx$ που είναι μια εξίσωση της μορφής $\Sigma F=-Dx$ με D=K άρα πράγματι το σύστημά μας πραγματοποιεί α.α.τ με D=K=400N/m.
Τότε όμως ο πλάτος Α της ταλάντωσης θα είναι $A=x_1+x_2=15+5=20$cm ή 0,2m.

β) Για t=0 είναι x=-A αφού η προς τα πάνω φορά είναι η θετική. Οπότε από τη γενική εξίσωση της α.α.τ: $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ προκύπτει $\varphi_0=\dfrac{3\pi}{2}$ rad. Ακόμη είναι $K=m\omega^2 \Rightarrow \omega=10$rad/s. Τελικά για την εξίσωση της α.α.τ θα έχουμε

$x=0{,}2\eta\mu(10t+\dfrac{3\pi}{2})$ (S.I). Για τη δύναμη επαναφοράς ισχύει $\Sigma F=-D\cdot x \Rightarrow \Sigma F=-Kx \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma F=-400\cdot 0{,}2\eta\mu(10t+\dfrac{3\pi}{2}) \Rightarrow \Sigma F=-\ 80\cdot\eta\mu(10t+\dfrac{3\pi}{2})$ (S.I).

γ) Για την απομάκρυνση d του σώματος από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου έχουμε $d=x_2+x \Rightarrow d=0{,}15+0{,}2\eta\mu(10t+\dfrac{3\pi}{2})$. Τότε η δύναμη του ελατηρίου κάθε χρονική στιγμή θα είναι $F_{\varepsilon\lambda}=-K\cdot d \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=-400\cdot 0{,}15-400\cdot 0{,}2\eta\mu(10t+\dfrac{3\pi}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{ελ}=-60-80ημ(10t+\frac{3π}{2})$.

Βέβαια για τη δύναμη του ελατηρίου μπορούμε από την τυχαία θέση που το σώμα απέχει x από τη Θ.Ι.Τ να έχουμε,

$ΣF=-Kx \Rightarrow F-mgημ30^0+F_{ελ}=-Kx \Rightarrow F_{ελ}= -F+mgημ30^0-Kx \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{ελ}=-80+20-80\cdot ημ(10t+\frac{3π}{2}) \Rightarrow F_{ελ}=-60-80\cdot ημ(10t+\frac{3π}{2})$.

Παρατηρούμε ότι στην τυχαία θέση είτε πάνω, είτε κάτω από τη Θ.Ι.Τ, για την $F_{ελ}$ θα βάζουμε πάντα $+F_{ελ}$ και το πρόσημο θα προκύπτει, εφόσον για τις υπόλοιπες δυνάμεις έχουμε βάλει τις αλγεβρικές τους τιμές λαβαίνοντας υπόψη μας και τη φορά τους.

δ) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μάζας m, ισχύει,

$\frac{ΔK}{Δt}=-D\cdot x\cdot υ \Rightarrow \frac{ΔK}{Δt}= - D\cdot A\cdot ημφ\cdot ω\cdot A\cdot συνφ$ με $(φ=ωt+φ_0)$ άρα

$\frac{ΔK}{Δt}=-\frac{DA^2ω}{2}\cdot 2$ ημφ·συνφ $\Rightarrow \frac{ΔK}{Δt}=-E\cdot ω\cdot ημ2φ$ με $E=\frac{DA^2}{2}=8J$.

Άρα προκύπτει $\frac{ΔK}{Δt}= -80\cdot ημ(2ωt+2φ_0) \Rightarrow \frac{ΔK}{Δt}= -80\cdot ημ(20t+3π)$.

Τότε για $t=\frac{π}{40}$ s έχουμε, $\frac{ΔK}{Δt}= -80\cdot ημ(20\frac{π}{40}+3π) \Rightarrow \frac{ΔK}{Δt}= -80\cdot ημ(\frac{7π}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{ΔK}{Δt}= -80\cdot ημ(-\frac{π}{2}) \Rightarrow \frac{ΔK}{Δt}= 80J/s$.

Αλλιώς,

μπορούμε για $t=\frac{π}{40}$s να υπολογίσουμε την απομάκρυνση x του σώματος, οπότε έχουμε, $x=0,2ημ(10t+\frac{3π}{2}) \Rightarrow x=0,2ημ(10\frac{π}{40}+\frac{3π}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x=0,2\cdot ημ(\frac{7π}{4}) \Rightarrow x=0,2ημ(-\frac{π}{4}) \Rightarrow x=-0,2\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=-0,1\cdot \sqrt{2}$ m

και την ταχύτητα ταλάντωσης,

$υ=2συν(10t+\frac{3π}{2}) \Rightarrow υ=2συν(\frac{7π}{4}) \Rightarrow υ=2συν(\frac{π}{4}) \Rightarrow υ=2\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow υ=\sqrt{2}$ m/s.

Τελικά έχουμε, $\frac{ΔK}{Δt}=-D\cdot x\cdot υ \Rightarrow \frac{ΔK}{Δt}=-400\cdot(-0,1\cdot \sqrt{2})\cdot \sqrt{2} \Rightarrow \frac{ΔK}{Δt}=80J/s$.