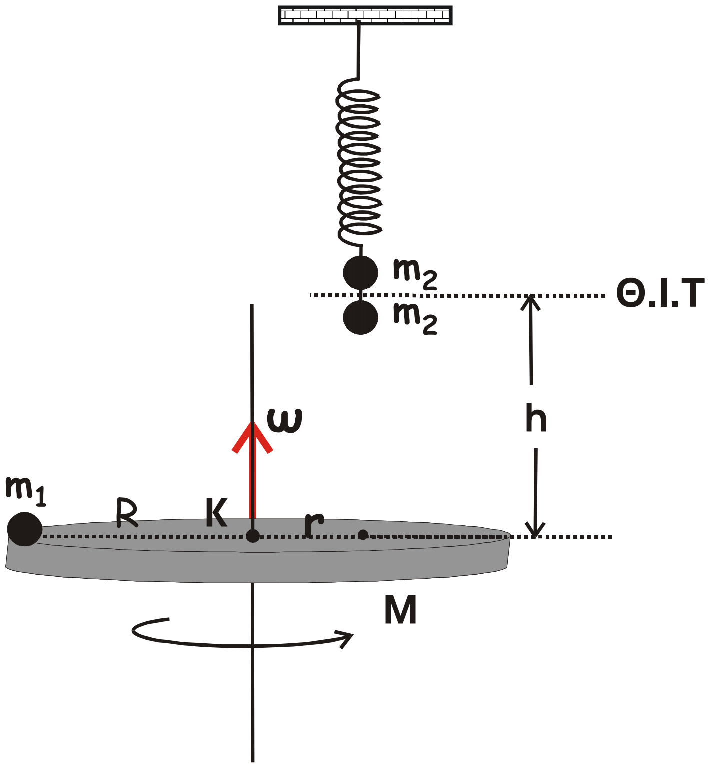
33. Δίσκος_ελατήριο

Ο δίσκος του σχήματος μάζας M=880g ακτίνα R=0,5m και περιστρέφεται αντιωρολογιακά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω=10 rad/s.
Στην περιφέρεια του δίσκου υπάρχει μάζα m_1=1Kg, ενώ πάνω από το δίσκο ταλαντώνονται δυο μάζες m_2, με m_2=1Kg και με εξίσωση ταλάντωσης x=0,1ημ100t. Η θέση ισορροπίας των μαζών απέχει από το δίσκο κατακόρυφη απόσταση h=2,2m.

Α) Τη στιγμή που η το σύστημα που ταλαντώνεται βρίσκεται στη θέση ισορροπίας αποκολλάται η κάτω m_2. Με ποια ταχύτητα φτάνει τότε αυτή στο δίσκο;



Β) Μόλις η m_2 φτάσει στο δίσκο συγκρούεται πλαστικά με το σύστημα δίσκος – m_1. Σε ποια απόσταση r από το κέντρο Κ του δίσκου πρέπει να συγκρουστεί η m_2, ώστε η κινητική ενέργεια του συστήματος που περιστρέφεται να μεταβληθεί κατά 20%; Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

Γ) Μια επόμενη χρονική στιγμή t_1 μετά την κρούση, με έναν εσωτερικό εκρηκτικό μηχανισμό η m_1 εκτοξεύεται εφαπτομενικά με αρχική ταχύτητα $υ_1$=80cm/s αντίθετης φοράς απ' αυτή της περιστροφής του δίσκου. Ποια σταθερή εφαπτομενική δύναμη πρέπει να ασκήσουμε μετά την έκρηξη στην περιφέρεια του δίσκου, ώστε αυτός να σταματήσει να περιστρέφεται αφού διαγράψει γωνία θ=10π rad;

Δi) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος τη στιγμή που εφαρμόζεται η δύναμη;
ii) Σε πόσο χρονικό διάστημα σταματάει η περιστροφή του συστήματος;
iii) Πόσες ταλαντώσεις πραγματοποιεί τότε η m_2, που είναι δεμένη στο ελατήριο στο παραπάνω χρονικό διάστημα;

Τριβές δεν υπάρχουν. Δίνεται για το δίσκο $I_δ = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$ και ακόμη $g=10m/s^2$.

Συνοπτική λύση:

Α) Τη στιγμή που αποχωρίζεται η m_2 βρίσκεται στη Θ.Ι.Τ και έχει μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{max}=\omega_T\cdot A=10$ m/s.

Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{τελ}-K_{αρχ}=W_w \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot \upsilon_2^2-\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot \upsilon_{max}^2=m_2\cdot g\cdot h \Rightarrow \upsilon_2=12$m/s.

Β) $I_\delta=\frac{1}{2}\cdot M\cdot R^2=\frac{1}{2}\cdot 88\cdot 10^{-2}\cdot\frac{1}{4}=11\cdot 10^{-2}$ Kg·m².
$I=I_\delta+m_1\cdot R^2=11\cdot 10^{-2}+25\cdot 10^{-2}=36\cdot 10^{-2}$ Kg·m².
$K_{αρχ}=\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot 10^{-2}\cdot 10^2=18$ J, $K_{τελ}=\frac{1}{2}\cdot(I+m_2\cdot r^2)\cdot\omega'^2$.
$\alpha=\frac{K_{αρχ}-K_{τελ}}{K_{αρχ}}=\frac{1}{5}\Rightarrow 1-\frac{K_{τελ}}{K_{αρχ}}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{K_{τελ}}{K_{αρχ}}=\frac{4}{5}\Rightarrow K_{τελ}=\frac{4}{5}\cdot 18$ J. Άρα έχουμε
$\frac{1}{2}\cdot(I+m_2\cdot r^2)\cdot\omega'^2=\frac{4}{5}\cdot 18$. Από την Α.Δ.Σ: $L_{αρχ}=L_{τελ}\Rightarrow I\cdot\omega=(I+m_2\cdot r^2)\cdot\omega'$, άρα έχουμε
$\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega\cdot\omega'=\frac{4}{5}\cdot 18\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot 36\cdot 10^{-2}\cdot 10\cdot\omega'=\frac{4}{5}\cdot 18\Rightarrow\omega'=8$ rad/s και $I\cdot\omega=(I+m_2\cdot r^2)\cdot\omega'\Rightarrow$
$\Rightarrow 36\cdot 10^{-1}=36\cdot 10^{-2}\cdot 8+8\cdot r^2\Rightarrow 0{,}72=8\cdot r^2\Rightarrow r^2=0{,}09\Rightarrow r=0{,}3$m.

Γ) $I_{ολ(αρχ)}=I+m_2\cdot r^2=36\cdot 10^{-2}+9\cdot 10^{-2}=45\cdot 10^{-2}$ Kg·m² και $I_{ολ(τελ)}=I_\delta+m_2\cdot r^2=$
$=11\cdot 10^{-2}+9\cdot 10^{-2}=20\cdot 10^{-2}$ Kg·m², κατά τη διάρκεια της έκρηξης ισχύει
Α.Δ.Σ: $L_{αρχ}=L_{τελ}\Rightarrow I_{ολ(αρχ)}\cdot\omega'=I_{ολ(τελ)}\cdot\omega''-m_1\cdot\upsilon_1\cdot R\Rightarrow 45\cdot 10^{-2}\cdot 8=20\cdot 10^{-2}\,\omega''-0{,}4\Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}2\cdot\omega''=4\Rightarrow\omega''=20$ rad/s.
Από το Θ.Μ.Κ.Ε: $K_{τελ}-K_{αρχ}=W_F\Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot I_{ολ(τελ)}\cdot\omega''^2=-F\cdot R\cdot\theta\Rightarrow$
$\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10^{-2}\cdot 4\cdot 10^2=F\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\pi\Rightarrow F=\frac{8}{\pi}$N.

Δi) $\frac{\Delta L}{\Delta t}=\Sigma\tau=F\cdot R=\frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{\pi}$ Kg·m²·s⁻²
ii) $\Sigma\tau=I_{ολ(τελ)}\cdot\alpha_{γων}\Rightarrow\alpha_{γων}=\frac{20}{\pi}$ rad/s², $\omega_{τελ}=\omega''-\alpha_{γων}\cdot t\Rightarrow t=\frac{\omega''}{\alpha_{γων}}\Rightarrow t=\pi$ s.
iii) Ισχύει $\omega_T=100$ rad/s, άρα για τη σταθερά Κ του ελατηρίου έχουμε $K=2m_2\cdot\omega_T^2$. Μετά τον αποχωρισμό έχουμε $K=m_2\cdot\omega_T'^2$ ή $2m_2\cdot\omega_T^2=m_2\cdot\omega_T'^2\Rightarrow$
$\Rightarrow\omega_T'=\omega_T\cdot\sqrt{2}=100\sqrt{2}$ rad/s.

Τότε έχουμε $\omega_T'=2\pi f'\Rightarrow f'=\frac{50\sqrt{2}}{\pi}$Hz. $f'=\frac{N}{t}\Rightarrow N=f'\cdot t=\frac{50\sqrt{2}}{\pi}\cdot\pi\Rightarrow$
$\Rightarrow N=50\sqrt{2}$ ταλαντώσεις.