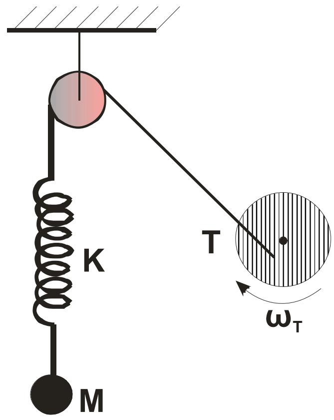
Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Ένα σώμα μάζας M=1 Kg είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K=4 N/cm. Όταν το σώμα ταλαντώνεται ελεύθερα, ενεργεί πάνω του δύναμη αντίστασης της μορφής $F_{αντ}= -0{,}2\cdot υ$ (S.I). Για να διατηρείται το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος σταθερό και ίσο με A=20 cm, ασκούμε στο σύστημα εξωτερική περιοδική δύναμη μέσω του τροχού Τ, που τον στρέφουμε με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $ω_Τ$=30 rad/s (σχήμα).

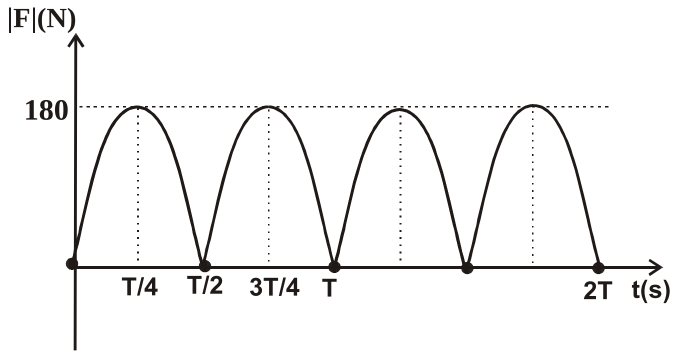


α. Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης x(t) και της ταχύτητας υ(t) της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο κατά τη θετική κατεύθυνση.
β. Να παραστήσετε γραφικά με το χρόνο και για το χρονικό διάστημα από t=0 έως t=2π/15 s το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που ενεργεί στο σώμα κατά την εξαναγκασμένη ταλάντωσή του. Με ποια περίοδο μεταβάλλεται το μέτρο της συνισταμένης δύναμης;
γ. Να βρείτε την απόλυτη τιμή του ρυθμού απορρόφησης ενέργειας από τη δύναμη της αντίστασης σε συνάρτηση με το χρόνο. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του ρυθμού αυτού;
δ. Αν αυξήσουμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού, τα πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θα αυξηθεί, θα μειωθεί ή θα παραμείνει αμετάβλητο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Π.Δ.Φ 2008

Συνοπτική λύση:

α) $x=A\cdot ημωt \Rightarrow x=0,2\cdot ημ30t$, $υ=ωA\cdot συνωt \Rightarrow υ=6\cdot συν30t$.
β) $F=-D\cdot x$, όμως $D=Mω_T^2=900N/m$. Άρα $F=-180\cdot ημ30t$ και $|F|=180\cdot|ημ30t|$, έτσι για τη γραφική παράσταση έχουμε



Ισχύει $T'=\dfrac{T}{2}$ ή $T'=\dfrac{π}{30}s$.

γ) $ΔW=F\cdot Δx \Rightarrow \dfrac{ΔW}{Δt} = F\cdot\dfrac{Δx}{Δt} = F\cdot υ=-b\cdot υ^2$.

Άρα $\left|\dfrac{ΔW}{Δt}\right|= b\cdot υ^2=0,2\cdot 36\cdot συν^2ωt \Rightarrow \left|\dfrac{ΔW}{Δt}\right|=7,2\cdot συν^2ωt$. Ακόμη $\left|\dfrac{ΔW}{Δt}\right|_{max}=7,2J/s$.

δ) Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι $f_0=\dfrac{1}{2π}\sqrt{\dfrac{K}{M}}=\dfrac{1}{2π}\sqrt{400} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_0=\dfrac{20}{2π}Hz$, ενώ η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι $f=\dfrac{ω}{2π} \Rightarrow f=\dfrac{30}{2π}Hz$. Άρα $|f-f_0|=\dfrac{10}{2π}$. Αν όμως αυξήσουμε την f, τότε θα αυξηθεί και η απόλυτη διαφορά $|f-f_0|$, οπότε το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θα μειωθεί.