ΦΘΙΝΟΥΣΑ – ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Σε ταλαντωτή που αποτελείται από μάζα m=2Kg και ελατήριο σταθεράς K, προσφέρουμε μια φορά ενέργεια τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και αυτός πραγματοποιεί φθίνουσα ταλάντωση με περίοδο T=1s, όση και η περίοδος της ελεύθερης και αμείωτης ταλάντωσης του συστήματος. Η ταλάντωση είναι της μορφής x=A·συνωt, ενώ το πλάτος της μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=10\cdot e^{-\ln 2\cdot t}$ (cm).
Στη συνέχεια μετά από χρόνο t=2s, εξασκούμε εξωτερική περιοδική δύναμη με περίοδο $T'=\frac{\pi}{10}$ s και ο ταλαντωτής πραγματοποιεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με πλάτος A αυτό που είχε τη στιγμή t=2s.
α) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης x σε συνάρτηση με το χρόνο t, για την εξαναγκασμένη ταλάντωση,
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της εξωτερικής περιοδικής δύναμης όταν ο ταλαντωτής m, περνάει από τη θέση ισορροπίας (x=0). Δίνεται $\Lambda=\frac{b}{2m}$.
γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο ρυθμό , με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα μέσω της δύναμης απόσβεσης. Ποια χρονική στιγμή γίνεται αυτός μέγιστος για πρώτη φορά;
δ) Να υπολογίσετε τη συχνότητα συντονισμού του συστήματος και τη σταθερά K του ελατηρίου. Να γράψετε τις σχέσεις της δυναμικής της κινητικής και της ενέργειας ταλάντωσης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας (x=0) και να κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις. Τι παρατηρείτε;
ε) Να γράψετε τη σχέση που δίνει τη συνολική δύναμη ΣF σε συνάρτηση με το χρόνο t, για την εξαναγκασμένη ταλάντωση,
στ) Να γίνει η γραφική παράσταση x(t) και A(t) από την αρχή του φαινομένου και για χρόνο t=2T+2T΄ s.
ζ) Αν το πλάτος της ταλάντωσης κατά το συντονισμό είναι A_0=1m ποιο είναι τότε το έργο που πρέπει να προσφερθεί, κατά το συντονισμό από την εξωτερική περιοδική δύναμη σε χρόνο Δt=10 s, από τη στιγμή που άρχισε να εξασκείται η δύναμη, ώστε να πραγματοποιείται η εξαναγκασμένη ταλάντωση;
Δίνεται $\pi^2=10$.

Λύση

α) Ισχύει $A=10\cdot e^{-2\ln 2}\Rightarrow A=10\cdot e^{-\ln 4}\Rightarrow A=\frac{10}{4}\Rightarrow A=2{,}5$cm.

Τότε εκείνη τη στιγμή για τη φθίνουσα ταλάντωση ισχύει $x=A\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi}{T}2T)\Rightarrow$

$\Rightarrow x=A\sigma\upsilon\nu 4\pi\Rightarrow x=A=2{,}5$cm.

Άρα για την εξαναγκασμένη ταλάντωση ισχύει x=Aσυνω΄t΄, όπου $\omega'=\frac{2\pi}{T'}=20$rad/s και t΄=t-2. Άρα προκύπτει $x=2{,}5\cdot 10^{-2}\sigma\upsilon\nu 20(t-2)\Rightarrow x=2{,}5\cdot 10^{-2}\sigma\upsilon\nu(20t-40)$ με t≥2s.

β) Για την εξωτερική περιοδική δύναμη έχουμε: $\Sigma F=m\alpha\Rightarrow F_{\varepsilon\xi}-b\upsilon-Kx=-m\omega^2x\Rightarrow$
$\Rightarrow F_{\varepsilon\xi}=b\upsilon+Kx-m\omega^2x$. Για x=0 είναι $F_{\varepsilon\xi}=b\cdot\upsilon$ με $\upsilon=\pm\upsilon_{max}$.
Όμως ισχύει $\upsilon_{max}=\omega'\cdot A=20\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2}=0{,}5$m/s.

Ακόμη ισχύει ότι b=2mΛ=4ln2Kg/s. Τελικά προκύπτει ότι:
$|F_{εξ}|=2\ln 2$ N.

γ) Ισχύει $υ= -ω΄\cdot Aημ(20t-40) \Rightarrow υ= -20\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2}\, ημ(20t-40) \Rightarrow υ= -0{,}5\cdot ημ(20t-40)$.

Ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα μέσω της δύναμης απόσβεσης είναι ίσος με,
$\frac{ΔW}{Δt}=F_{απ}\cdot υ= -bυ^2$. Άρα θα έχουμε $\frac{ΔW}{Δt} = -4\ln 2\frac{1}{4}\cdot ημ^2(20t-40) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{ΔW}{Δt} = -\ln 2\cdot ημ^2(20t-40)$. Έτσι προκύπτει ότι $(\frac{ΔW}{Δt})_{max}=\ln 2$ j/s. Γενικά μπορούμε να πούμε πως ισχύει $(\frac{ΔW}{Δt})_{max}=bω^2A^2 \Rightarrow (\frac{ΔW}{Δt})_{max} =4\ln 2\cdot 400\cdot 2{,}5^2\cdot 10^{-4} \Rightarrow$
$\Rightarrow (\frac{ΔW}{Δt})_{max}= \ln 2$ j/s.
Για $\frac{ΔW}{Δt} =(\frac{ΔW}{Δt})_{max}$ ισχύει $ημ(20t-40)=\pm 1 \Rightarrow 20t- 40=κπ+\frac{π}{2} \Rightarrow 20t = 40+κπ+\frac{π}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow t=2+\frac{κ}{20}π+\frac{π}{40}$ οπότε για κ=0 είναι: $t_{min}=2+\frac{π}{40}$ s.

δ) Ισχύει $T_0=T=1s$, άρα $f_0=\frac{1}{T_0}=1Hz$ οπότε είναι $ω_0=2π$ rad/s.

Όμως $T_0=2π\sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow 1=4π^2\frac{2}{K} \Rightarrow K=8π^2 \Rightarrow K=80N/m$

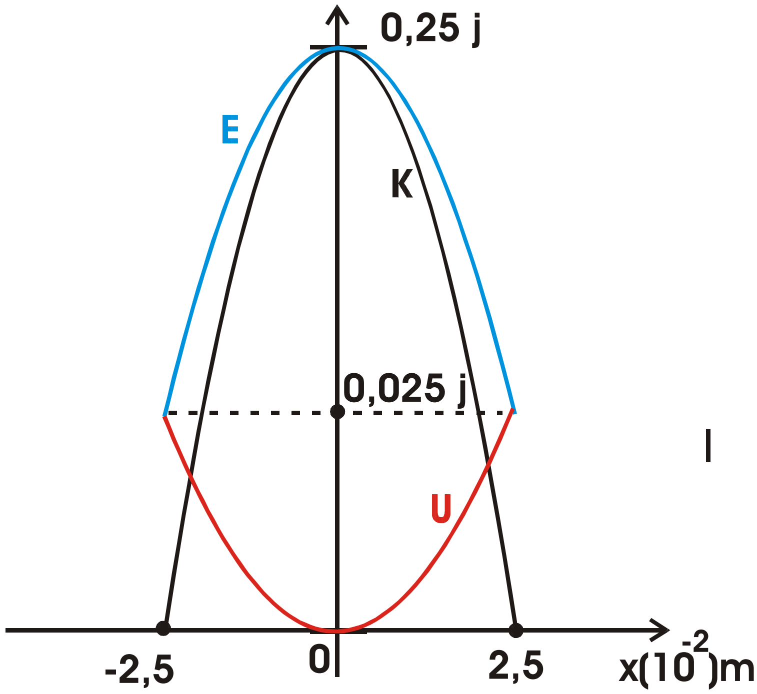
Για τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης έχουμε $U=\frac{1}{2}Dx^2$ με D=K άρα $U=\frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow U=\frac{1}{2}80x^2 \Rightarrow$ $\mathbf{U=40\cdot x^2}$.

Ακόμη $K= \frac{1}{2}mυ^2 \Rightarrow K= \frac{1}{2}mω^2(A^2-x^2)$ με $ω=ω_{διεγέρτη}=ω΄=20rad/s$. Άρα έχουμε
$K= 400\cdot(625\cdot 10^{-6}-x^2) \Rightarrow$ $\mathbf{K= 0{,}25\text{-}400x^2}$.
Τότε για την ενέργεια της ταλάντωσης έχουμε $E=K+U \Rightarrow E=0{,}25-400x^2+40\cdot x^2$
$\Rightarrow$ $\mathbf{E=0{,}25\text{-}360x^2}$.
Παρατηρούμε λοιπόν ότι η ολική ενέργεια Ε κατά τη διάρκεια της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μεταβάλλεται. Στην πραγματικότητα η ενέργεια Ε παραμένει σταθερή μόνο κατά μέσο όρο.
Ισχύει $F_{εξ}=bυ+Kx-mω^2x \Rightarrow F_{εξ}=bυ+(K-mω^2)\,x \Rightarrow F_{εξ}=bυ+m\cdot(ω_0^2-ω^2)\cdot x$. Οπότε το έργο της $F_{εξ}$ για μετατόπιση της μάζας m από τη θέση ισορροπίας στη μέγιστη απομάκρυνση είναι $W_{Fεξ}=\int_0^A [b\cdot υ\cdot dx+m(ω_0^2-ω^2)\cdot x\cdot dx]$ ενώ το έργο της δύναμης απόσβεσης $F_{απ}$, για το ίδιο διάστημα [0- A], είναι $W_{Fεξ}=-\int_0^A b\cdot υ\cdot dx$, οπότε έχουμε ένα συνολικό έργο από τις εξωτερικές δυνάμεις ίσο με,

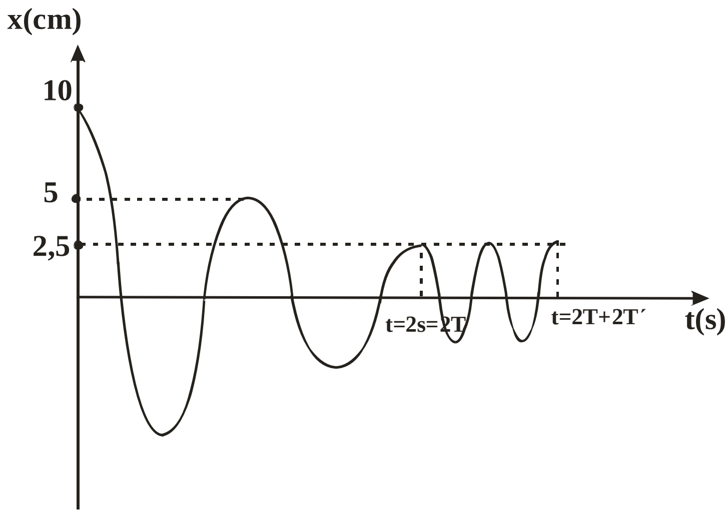
$W_{ολ}=\int_0^A m(\omega_0^2-\omega^2)\cdot x\cdot dx=\frac{m\cdot(\omega_0^2-\omega^2)}{2}\cdot A^2$=-0,225J. Παρόμοια για το διάστημα [-A- 0], έχουμε ένα συνολικό προσφερόμενο έργο από τις εξωτερικές δυνάμεις ίσο με $W_{ολ}=-\frac{m\cdot(\omega_0^2-\omega^2)}{2}\cdot A^2$=+0,225J. Οπότε το συνολικό έργο από τις εξωτερικές δυνάμεις σε κάθε ημιπερίοδο και τελικά σε κάθε περίοδο της ταλάντωσης είναι μηδέν. Δηλαδή τελικά όσο έργο καταναλίσκεται από τη δύναμη απόσβεσης σε μια περίοδο τόσο και προσφέρεται από την $F_{εξ}$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι **κατά μέσο** όρο η ενέργεια E, της εξαναγκασμένης ταλάντωσης παραμένει σταθερή, ενώ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργειά της μεταβάλλεται λόγω του έργου των εξωτερικών δυνάμεων.
Για τις γραφικές παραστάσεις έχουμε το διπλανό σχήμα:

*** Η κλίμακα δεν είναι η ακριβής για να είναι πιο ευδιάκριτες οι γραφικές παραστάσεις**.*



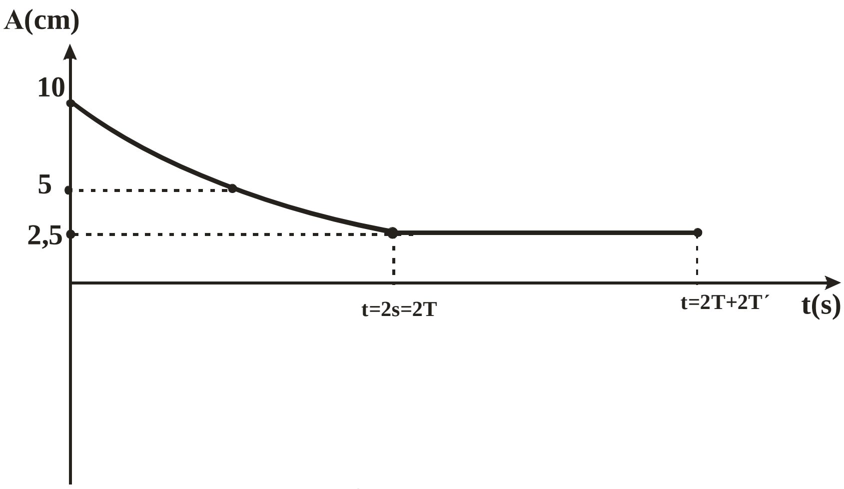
ε) Για τη συνολική δύναμη σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση ισχύει: ΣF=m·α⇒ ⇒ΣF=-m·ω΄²·x. Άρα ΣF=-800·2,5·10⁻²συν(20t-40)⇒ ΣF=-20συν(20t-40) για t≥2s.

στ) Για την απομάκρυνση x ισχύει 0≤t<2s: $x=10e^{-t\ln2}$συν2πt (cm)
t≥2s: x=2,5συν(20t- 40) (cm).
Οπότε η γραφική παράσταση x(t) είναι αυτή του σχήματος:



Για το πλάτος Α ισχύει $0 \le t < 2s$: $A = 10e^{-t\ln 2}$ (cm)
$t \ge 2s$: $A = 2{,}5$ (cm).

Οπότε η γραφική παράσταση A(t) είναι αυτή του σχήματος:



ζ) Για το έργο σε μια περίοδο ισχύει $W_T = \pi \cdot b \cdot A_0^2 \cdot \omega \Rightarrow W_T = 4\pi \ln 2 \cdot 2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow W_T = 80 \cdot \ln 2$joule/περίοδο. Όμως $\frac{\Delta t}{T_0} = \frac{10}{1} \Rightarrow \Delta t = 10 \cdot T_0$. Τότε $W_{ολ} = 10 \cdot 80 \cdot \ln 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow W_{ολ} = 800 \cdot \ln 2$j.

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια που προσφέρεται ανά περίοδο είναι ίση με τις απώλειες. Αυτό ισχύει **σε κάθε περίπτωση** είτε έχουμε συντονισμό είτε όχι. Αρκεί να έχει σταθεροποιηθεί το πλάτος.