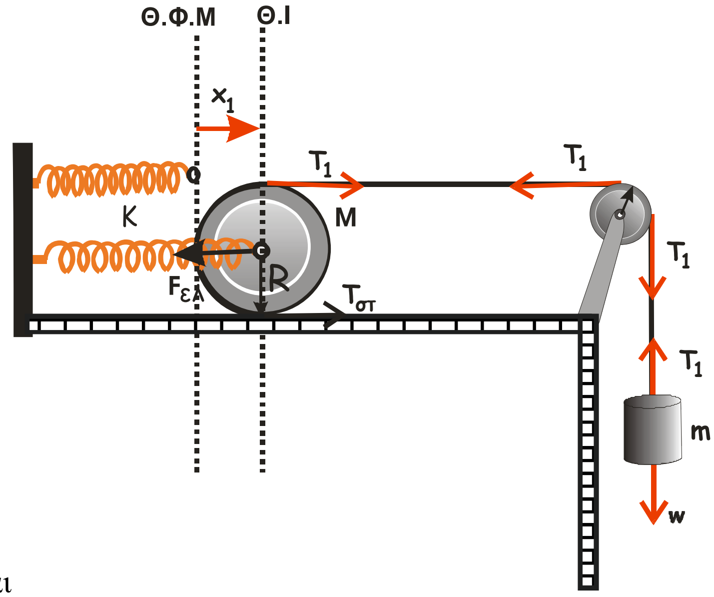
Γύρω από τον ομογενή κύλινδρο του σχήματος μάζας M=4Kg, είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα το ελεύθερο άκρο του οποίου μέσω αβαρούς τροχαλίας δένεται με σώμα μάζας m=1Kg. Ο κύλινδρος M είναι δεμένος από το κέντρο μάζας του, στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς K=400N/m



και μπορεί να κυλίεται στο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να ολισθαίνει. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί.

Τραβάμε τη μάζα m κατακόρυφα προς τα κάτω κατά d=10cm και την αφήνουμε ελεύθερη.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις ταλάντωσης της μάζας m και του κυλίνδρου M,

β) να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών μεταβάλλεται η επιτάχυνση του άξονα περιστροφής του κυλίνδρου,

γ) να βρείτε πως μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης η στατική τριβή μεταξύ του κυλίνδρου και του οριζόντιου επιπέδου και

δ) αν δίνεται ότι μ_s=1,6 τότε για ποιες τιμές του πλάτους ταλάντωσης του κυλίνδρου, αυτός δεν ολισθαίνει; Δίνονται για τον κύλινδρο $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

α) Από την ισορροπία έχουμε:

m: $mg=T_1$

M: $T_1+T_{στ}=Kx_1$ και $(T_1-T_{στ})R=0 \Rightarrow T_{στ}=T_1$, άρα $2mg=Kx_1$.

Σε μια τυχαία θέση και έστω κάτω από τη θ.Ι.Τ:

m: $T_1'-mg=2m\alpha_{acm}$ (1)

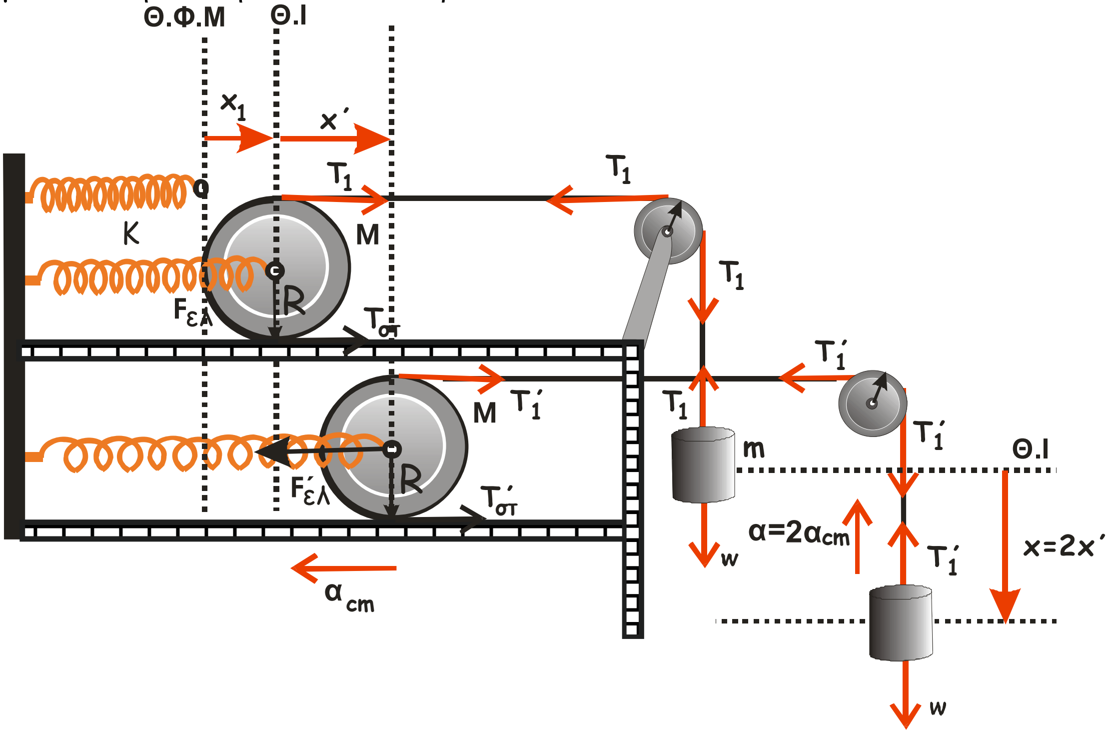
M: $F_{ελ}'-T_1'-T_{στ}'=M\alpha_{cm}$ (2) και

$$(T_{στ}'-T_1')R=\frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T_{στ}'-T_1'=\frac{M}{2}\alpha_{cm} \quad (3).$$

$(2) \wedge (3) \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}'-2T_1'=\frac{3M}{2}\alpha_{cm}$ και $(1) \Rightarrow 2T_1'-2mg=4m\alpha_{acm}$ τελικά

$F_{\varepsilon\lambda}'-2mg=(\frac{3M}{2}+4m)\alpha_{cm} \Rightarrow Kx_1+K\frac{x}{2}-2mg=(\frac{3M}{2}+4m)\alpha_{cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2mg+K\frac{x}{2}-2mg=(\frac{3M}{2}+4m)\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm}=\dfrac{Kx}{2(\frac{3M}{2}+4m)} \Rightarrow \alpha_{cm}=20\cdot x$, όπου x είναι η μετατόπιση της μάζας m ή $\alpha_{cm}=20\cdot 2\cdot x' \Rightarrow \alpha_{cm}=40\cdot x'$. Ισχύει $x=2\cdot x'$, όπου x' είναι η μετατόπιση από τη Θ.Ι του κυλίνδρου.



Τυχαία θέση (m): $\Sigma F=mg-T_1'=-2m\alpha_{acm} \Rightarrow \Sigma F=-40x$ άρα έχουμε α.α.τ με D=40N/m και $\omega=\sqrt{40}$ rad/s, άρα για τη μάζα m: $x_1=0{,}1\sigma\upsilon\nu\sqrt{40}\,t$.

Για τον κύλινδρο τυχαία θέση (M): $\Sigma F=T_1'+T_{\sigma\tau}'-F_{\varepsilon\lambda}'=-M\alpha_{acm} \Rightarrow \Sigma F=-4\cdot 40\cdot x' \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma F=-160\cdot x'$ άρα έχουμε α.α.τ με D΄=160N/m, και $\omega=\sqrt{40}$ rad/s,άρα $x_2=0{,}05\ \sigma\upsilon\nu\sqrt{40}\,t$.

β) $\alpha_{cm}=20\cdot x$ με $-0{,}1\le x\le 0{,}1$m άρα $-2\le \alpha_{cm}\le 2$ m/s^2.

γ) $(1) \Rightarrow T_1'=mg+2m\alpha_{acm} \Rightarrow T_1'=10+40x$ και $(3) \Rightarrow T_{\sigma\tau}'=10+80x$ με $-0{,}1\le x\le 0{,}1$m, ή $T_{\sigma\tau}'=10+160x'$ με $-0{,}05\le x'\le 0{,}05$m.

δ) Ισχύει $T_{\sigma\tau}'\le \mu_s N \Rightarrow 10+160x'\le 64 \Rightarrow x'\le 33{,}75$cm.