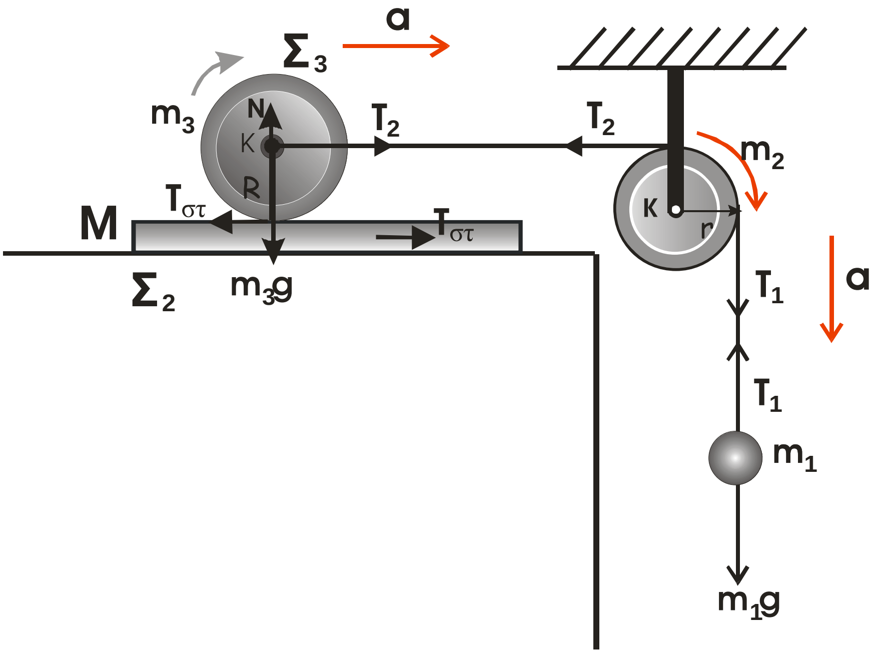
ΚΥΛΙΣΗ ΣΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΠΑΤΩΜΑ…



Το σώμα Σ_2 του σχήματος έχει μάζα M=1Kg και βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο.
Πάνω στο Σ_2 βρίσκεται ομογενής κύλινδρος Σ_3 που έχει μάζα m_3=4Kg.
Το Κ.Μ του Σ_3 δένεται μέσω αβαρούς μη εκτατού σχοινιού (οριζόντιου μεταξύ κυλίνδρου – τροχαλίας) το οποίο περνά από τροχαλία μάζας $m_2=\frac{10}{3}$Kg και έχει δεμένο στο άλλο του άκρο σώμα μάζας m_1=2Kg.
Όταν αφήσουμε το σώμα μάζας Σ_3, ελεύθερο τότε αυτό αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο Σ_2.
α) Να βρείτε την επιτάχυνση του άξονα περιστροφής του κυλίνδρου.
β) Να βρείτε το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων για μετατόπιση του Κ.Μ του κυλίνδρου κατά x=1,2m,
γ) Πόση είναι τότε η κινητική ενέργεια του κάθε σώματος;
δ) Πόσο μετακινήθηκε τότε το Σ_3 πάνω στο Σ_2;
ε) Πόσος είναι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος;

Δίνεται $g=10m/s^2$ και ακόμη $I=\frac{1}{2}\cdot m\cdot R^2$.

Συνοπτική λύση:

α) Για την ταχύτητα του άξονα του κυλίνδρου ισχύει $\upsilon_{cm}=\omega\cdot R+\upsilon'$, όπου υ' είναι η ταχύτητα του Σ_2 και με παραγώγιση προκύπτει
$\alpha=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R+\alpha'$ (1) όπου α΄ είναι η επιτάχυνση του Σ_2.
Τότε m_1: $m_1g-T_1=m_1\cdot\alpha \Rightarrow T_1=10-2\cdot\alpha$ (2)

m_2: $(T_1-T_2)\cdot r=\frac{1}{2}m_2\cdot r^2\cdot\frac{\alpha}{r} \Rightarrow T_1-T_2=\frac{5}{3}\cdot\alpha$ (3)

m_3: $T_2-T_{\sigma\tau}=m_3\cdot\alpha$ (4) και

$T_{\sigma\tau}\cdot R=\frac{1}{2}m_3\cdot R^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau}=2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \Rightarrow$(1) $T_{\sigma\tau}=2\cdot(\alpha-\alpha')$ (5).

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει $T_2=6\cdot\alpha-2\cdot\alpha'$ (6).

M: $T_{\sigma\tau}=M\cdot\alpha' \Rightarrow M\cdot\alpha'=2\cdot(\alpha-\alpha') \Rightarrow \alpha'=\frac{2}{3}\cdot\alpha$ (7).

Από (6)$\Rightarrow T_2=6\cdot\alpha-2\cdot\frac{2}{3}\cdot\alpha \Rightarrow T_2=\frac{14}{3}\cdot\alpha$ (8). Τότε η σχέση (3) μέσω των (2) $\wedge$ (8)μας δίνει $\alpha=\frac{12}{5}=2{,}4m/s^2$.

β) $W_{w1}=m_1\cdot g\cdot x=10\cdot 1{,}2=24J$.

γ) $x=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2\Rightarrow t=1s$. Τότε $\upsilon=\alpha\cdot t=2{,}4m/s$. Ακόμη $\upsilon'=\alpha'\cdot t$ όπου $\alpha'=\frac{2}{3}\cdot\alpha=1{,}6m/s^2$ άρα $\upsilon'=1{,}6m/s$.

m_1: $K_1=\frac{1}{2}m_1\upsilon^2=5{,}76J$

m_2: $K_2=\frac{1}{2}I\omega_2^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_2 r^2\cdot\omega_2^2=\frac{1}{4}m_2\upsilon^2=4{,}8J$

M: $K_M=\frac{1}{2}M\cdot\upsilon'^2=1{,}28J$

m_3: $K_3=\frac{1}{2}m_3\upsilon^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}m_3\upsilon^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_3 R^2\cdot\omega^2=2\upsilon^2+\omega^2\cdot R^2$,όπου $\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\alpha-\alpha'\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\alpha-\frac{2}{3}\cdot\alpha \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\frac{1}{3}\cdot\alpha=0{,}8m/s^2$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{0{,}8}{R}$ οπότε $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t=\frac{0{,}8}{R}$ (t=1s)

Τότε $K_3=2\upsilon^2+\omega^2\cdot R^2=2\upsilon^2+0{,}64=2\cdot 5{,}76+0{,}64\Rightarrow K_3=12{,}16J$.

Παρατηρούμε ότι $K_{o\lambda}=K_1+K_2+K_3+K_M=24J=W_{w1}$.

δ) $x=1{,}2m$

$x'=\frac{1}{2}\cdot\alpha'\cdot t^2\Rightarrow x'=\frac{1}{2}\cdot 1{,}6=0{,}8m$, άρα $\Delta x=1{,}2-0{,}8=0{,}4m$.

ε) $\frac{\Delta K_{o\lambda}}{\Delta t}=\Sigma F_{\varepsilon\xi}\cdot\upsilon=m_1\cdot g\cdot\upsilon=20\cdot 2{,}4=48J/s$.

Παρατηρούμε ότι:

m_1: $\frac{\Delta K_1}{\Delta t}=(m_1\cdot g-T_1)\cdot\upsilon=11{,}52J/s$,

όπου $T_1=15{,}2N$, $T_2=11{,}2N$ και $T_{\sigma\tau}=1{,}6N$.

m_2: $\frac{\Delta K_2}{\Delta t}=(T_1-T_2)\cdot r\cdot\omega=(T_1-T_2)\cdot\upsilon=9{,}6J/s$.

m_3: $\frac{\Delta K_3}{\Delta t}=T_2\cdot\upsilon-T_{\sigma\tau}\cdot\upsilon+T_{\sigma\tau}\cdot\omega\cdot R=T_2\cdot\upsilon-T_{\sigma\tau}\cdot\upsilon+T_{\sigma\tau}\cdot(\upsilon-\upsilon')=T_2\cdot\upsilon-T_{\sigma\tau}\cdot\upsilon'=11{,}2\cdot 2{,}4-1{,}6\cdot 1{,}6=$
$=26{,}88-2{,}56=24{,}32J/s$.

M: $\frac{\Delta K_4}{\Delta t}=T_{\sigma\tau}\cdot\upsilon'=1{,}6\cdot 1{,}6=2{,}56J/s$.

Άρα $\frac{\Delta K_{o\lambda}}{\Delta t}=11{,}52+9{,}6+24{,}32+2{,}56=48J/s$.